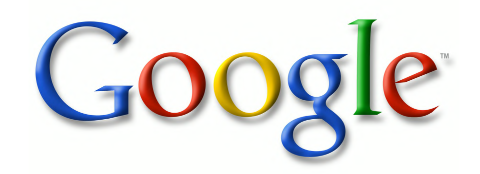
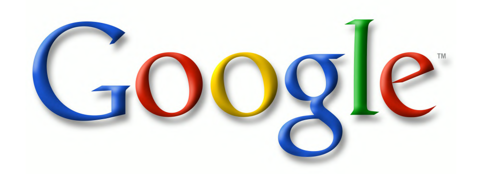
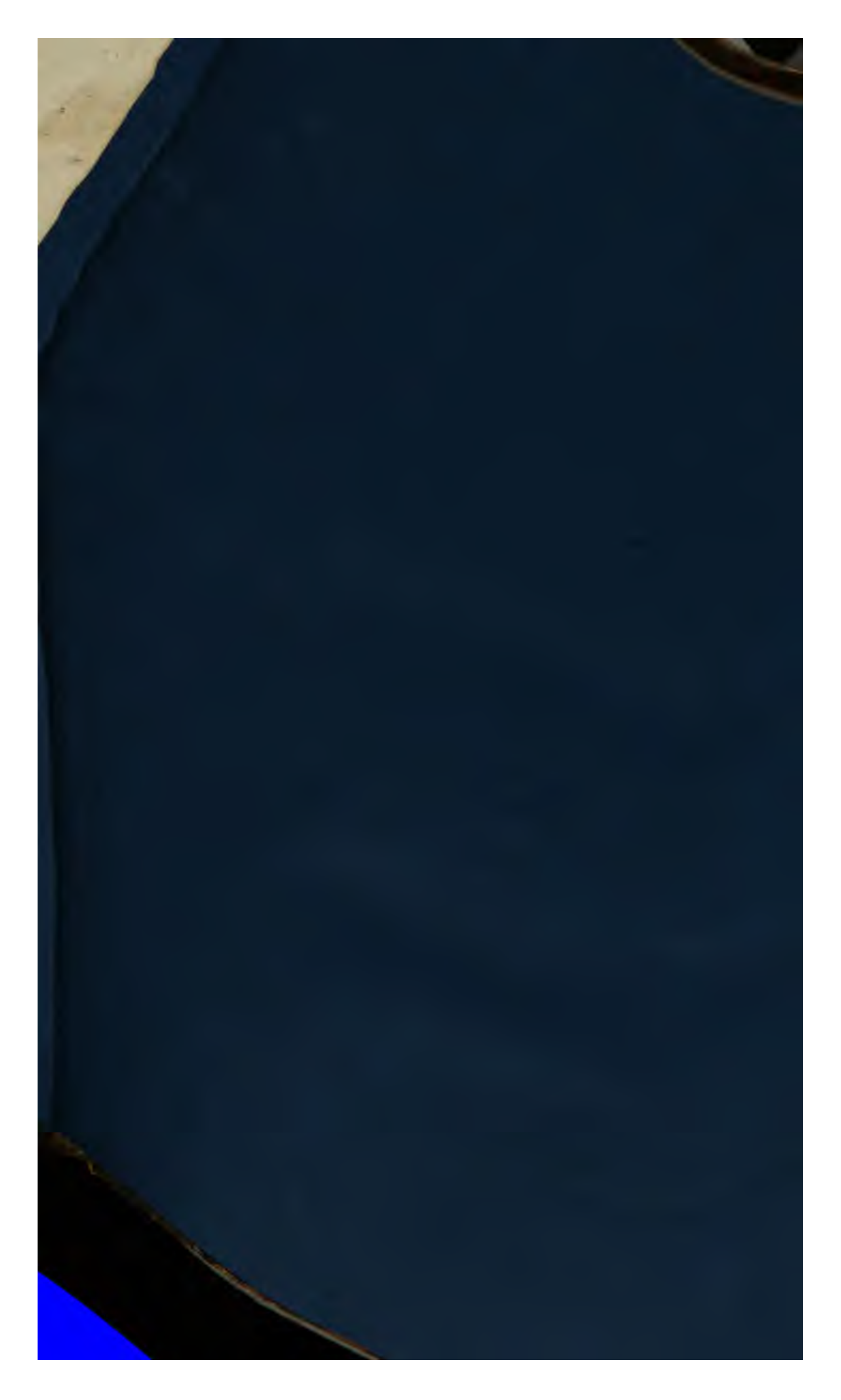
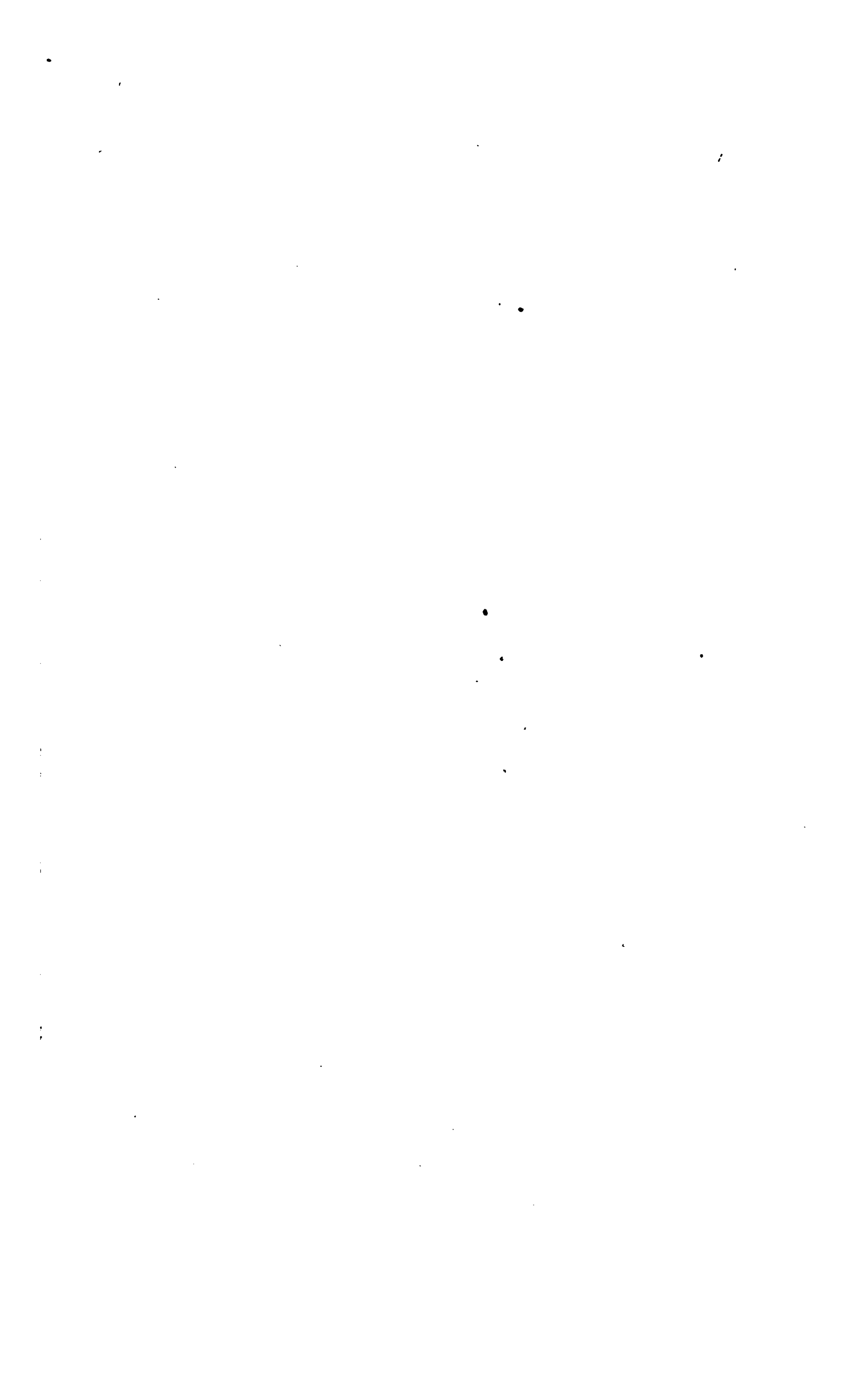





ACADEMIÆ HARVARDIANÆ ECCLESIÆ ET CHRISTO SIGILLVM
AN. NI. AON.
Bought with
the Fund bequeathed by
Horace A. Haven,
of Portsmouth, N.H.
(Class of 1842.)
Rec. Dec. 2. 1851.







Versuch einer Kritik

der

Principien

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bearbeitet

von

Jakob Friedrich Fries,

Doctor der Medicin und Philosophie, Großherzogl. S. Weim. Geh. Hof-
rath, ordentlichem Professor der Physik zu Jena und correspondirendem Mit-
glied der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin und München, aus-
wärtigem Mitglied der Gesellschaft für Wiss. u. Kunst in Utrecht.

Braunschweig,

Verlag von Friedr. Vieweg u. Sohn.

1842.

Vorwort.

Durch den Naturalismus der Encyclopädisten wurde den ruhigeren Gebildeten in Frankreich eine gleichsam Epikurische Begeisterung für Aufklärung, Wahrheit und Menschenrechte gegen alle Arten der Vorurtheile und des Aberglaubens zu Theil, welche zur Zeit der Revolution die edle Geistesanregung für weltbürgerliche wissenschaftliche Interessen brachte, nicht nur Einheit von Maaß und Gewicht zu bestimmen suchte, sondern sich aller großartigen naturwissenschaftlichen Interessen annahm. Aber die übertriebenen politischen Hoffnungen dieser Begeisterung wurden durch den jakobinischen Pöbel an den meisten ihrer nach der Gironde benannten edeln Vertreter blutig gestraft. Zu den Lieblingsideen dieser Aufklärung gehörte dann auch, wie vorzüglich Condorcet, einer der Erschlagenen, lehrte, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer der wichtigsten Gegenstände des öffentlichen Unterrichts sei, denn sie sei die Rechnung des gesunden Menschen-

verstandes, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluß von Hoffnung, Furcht und allen Gemüthsbewegungen auf unser Urtheil vernichtet und somit Vorurtheil und Aberglaube aus dem Urtheil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne. Damit ist uns denn auch eine höchst wichtige Wahrheit angeregt worden; aber die Begründung der ganzen Lehre ist eigentlich philosophisch, und darin blieben jene Lehrer sehr einseitig und erregten deswegen überspannte Hoffnungen, denen nie entsprochen werden kann. Die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht nämlich auf der Theorie der Inductionen, und hier gehen jene Lehret von dem Sensualismus des Locke, Condillac und Hume aus, und wollen alle Inductionen nur als empirische nachweisen, welche ohne alle Erkenntnisse à priori gelten sollen. Dagegen hat uns Kant belehrt' daß jede Erfahrung erst a priori erkannte Bedingungen ihrer Möglichkeit voraussetze, und wir leiten daraus ab, daß jede taugliche Induction eine rationelle werden müsse, welche nicht nur durch die Erwartung ähnlicher Fälle, sondern zuhöchst immer durch leitende Maximen gelte, deren oberste a priori erkannt werden.

So wird es nothwendig für die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Metaphysik des Calculs, wie die Franzosen sagen, eine andere Grundlage zu geben. Dazu kommt nun noch, daß die Franzosen, durch die einseitige Begründung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung

eift viel zu weites Feld geben wollen, indem im Grunde alle unsre Erkenntniß allgemeiner Gesetze von ihren Regeln abhängen soll. Dadurch ist es gekommen, daß sie viele Aufgaben stellen und Lehren ausführen, die gar keinen wahren Grund haben, und dagegen beabsichtige ich hier meine Rede zu richten, wiewohl ich damit vielen der größten Mathematiker streitend entgegentrete. Ich behaupte, daß der Grundbegriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau genug bestimmt sei; ich behaupte, daß die ganze Lehre des Daniel Bernoulli von der espérance morale eine irrige sei; ich behaupte, daß die ganze herkömmliche Lehre von der Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen und der richterlichen Entscheidungen falsch sei, und, was das Wichtigste ist, ich muß einen großen Theil der Lehren von der Wahrscheinlichkeit a posteriori ganz zu beseitigen suchen.

Dies sind die Zwecke der hier vorliegenden Arbeit. Wenn jemand in mathematischen Lehren, wie es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Combinationslehre und combinatorische Analysis so oft geschehen ist, sich müssige, das heißt, jetzt anwendungslose schwere Aufgaben stellt und ihre Auflösung nachweist, so gewährt dies immer eine gute Uebung des mathematischen Scharfsinns und der Behendigkeit im mathematischen Urtheil, wodurch oft später Entdeckungen für die Anwendung sehr gefördert werden können; aber für das,

was sich gar nicht berechnen läßt, soll man auch nicht scheinbare Rechnungen anlegen.

Mit dem hier vorliegenden Versuch suche ich dem zu entsprechen, was ich in der Geschichte der Philosophie bei David Hume (Theil 2. §. 171.) und früher schon in der Vorrede zur mathematischen Naturphilosophie forderte, aber auf eine andere Zeit und Gelegenheit verwies.

Während ich an dieser Abhandlung arbeite, ist Poissons großes Werk: recherches sur la probabilité des jugemens, nicht nur erschienen, sondern auch in meine Hand gelangt. Die große Kunst der mathematischen Analysis, welche ihm eigen war, zeigt sich darin auf eine glänzende Weise, daneben hat er manchen besondern von den Fehlern gerügt, gegen welche ich meine Kritik richte; aber die Grundgedanken trifft er doch nicht, ein wichtiger Theil meiner tadelnden Kritik bleibt auch gegen ihn stehen.

Inhaltsanzeige.

Druckfehler.

S. 7. Z. 5. v. u. lies einem statt reinen.
= 12. = 1. v. u. = Unsere = Unser.
= 22. = 10. v. o. = Wetten = Welten.
= 24. = 17. v. o. = wirder = wieder.
= 26. = 8. v. u. = eine = reine.
= 29. = 20. v. o. = welche = welcher.
= 41. = 2. v. o = einer = eine.
= 81. = 7. v. u. = $(m+p-q)$ st. $(m+p-p)$.
= 82. = 1. v. o. = Renner = Name.

Einleitung.

§. I.

Unter dem Namen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (calcul des probabilités) ist nach und nach ein Theil der angewandten Arithmetik ausgebildet worden, dessen Untersuchungen durch drei Interessen belebt wurden. Das erste ist ein rein mathematisches, welches durch die Schwierigkeit der Entwickelung ihrer Formeln, vorzüglich bei combinatorisch analytischen Aufgaben, belebt wurde; das zweite gehört dem Nutzen, welchen diese Berechnungen in der politischen Arithmetik gewähren; das dritte ist ein allgemeines philosophisches, demgemäß wie diese Art der Untersuchungen zu den allgemeinen Methoden der Untersuchungsphilosophie mit gehören soll.

Das erste Interesse ließ die wissenschaftliche Behandlung dieser Lehre mit der Lösung einzelner Glückspiele betreffender Aufgaben durch Pascal und Fermat anfangen. Huyghens sammelte und vermehrte das vorhandene zunächst in der Schrift: de ratiociniis in ludo aleae (Rechnungen für das Würfelspiel). Das Interesse an dieser Art Untersuchungen wurde dann allgemeiner, seitdem Hudde's und der Statthalter Witt in Holland, so wie Halley in England die Anwendung derselben auf Verhältnisse des Menschenlebens zu machen anfingen. Halley gab hier die erste Sterblichkeitstabelle. Die reine Theorie wurde fortgebildet vorzüglich durch Jakob Bernoulli in der ars conjectandi (Vermuthungskunst); dann durch Moivre in der doctrine of chances, durch Montmort in der analyse des jeux de hasard, und später in einzelnen Abhandlungen durch Euler und de la Grange,

so wie durch Condorcet im essai sur la probabilité des décisions.

Die beiden wichtigsten Anwendungen dieser Rechnungen bleiben immer die auf Sterblichkeit der Menschen und alle Assecuranzanstalten einerseits, und die auf Beobachtungskunst im Allgemeinen andrerseits. Die ersten sind von sehr Vielen bearbeitet worden: Deparcieux, Kerßeboom, Wargentin, Dupré de saint Maure, Simpson, Süßmilch, Messène, Moheau, Price, Duvillard, Tetens, Langsdorf, Lambert werden besonders genannt. Für die allgemeinen Methoden der wahrscheinlichen Bestimmungen in der Beobachtungskunst haben Cötes, Lagrange und vorzüglich Gauß und Legendre die Hauptverdienste.

Alle diese Aufgaben vereinigen sich endlich unter einem Gedanken, wenn wir mit Condorcet und Laplace die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung philosophisch bestimmen. Laplace sagt zum Schluß seines essai philosophique oder der Einleitung in die zweite Auflage seines großen Werkes: »die Theorie der Wahrscheinlichkeiten ist im Grunde nichts anders, als der in Rechnung gebrachte Menschenverstand. Sie lehrt das mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinkt fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon geben zu können. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf denen sie beruht, die Schärfe und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung von Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten öffentlichen Anstalten und die Ausdehnung, die sie durch ihre Anwendung auf die wichtigsten Aufgaben der Philosophie und der moralischen Wissenschaften erhalten hat und noch mehr erhalten kann, und berücksichtigt man zugleich, daß sie selbst bei Gegenständen, die nicht berechnet werden können, die richtigsten Ansichten verschafft, welche die Urtheile darüber leiten können, und vor verwirrenden Täuschungen sich hüten lehrt, so wird man einsehen, daß keine Wissenschaft des Nachden-

kens würdiger ist und keine mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann.«

Nach diesem umfassenden Gedanken ist dann das Hauptwerk unsrer Wissenschaft des Laplace théorie analytique des probabilités entworfen und ausgeführt. Es entwickelt die durchgreifendsten und künstlichen Methoden der Analysis, und zeigt nach allen angedeuteten Aufgaben ihre Anwendungen. In demselben Umfang der Aufgabe hat nachher auch Lacroix seinen traité élémentaire du calcul des probabilités entworfen, in welchem nur die Analysis auf die leichtern Anfänge der Theorien beschränkt bleibt. Ein klares, wohlgeordnetes Werk, in welchem fast alle Interessen dieser Lehre verhältnißmäßig bedacht sind und welches durch die Uebertragung ins Deutsche von Unger (Erfurt 1818) auch jeder deutschen Schule brauchbar geworden ist.

Hier finde ich mich nun veranlaßt, über diese Lehre mitzusprechen, aus zwei Gründen. Einmal: die drei Interessen dieser Untersuchungen, nämlich die des mathematischen Erfindungsgeistes, des philosophischen Geistes der Erfahrungswissenschaften und die der politischen Arithmetik bleiben keinesweges in Uebereinstimmung mit einander. Allzu oft hat der mathematische Erfindungsgeist zur bloßen Uebung des Scharfsinns Aufgaben gestellt von anscheinender Anwendung in der politischen Arithmetik, bei denen es nur um die Entwicklung schwieriger Formeln zu thun ist, die in der That gar keine Anwendung zulassen. Man rechnet ganz sicher fort, weiß aber nicht, womit man umgeht. Da meine ich nun, was sich nicht berechnen läßt, soll man auch nicht auf Zahlen bringen, und deshalb habe ich mich bemüht, alle solche falsch begründete Rechnungsweisen aus der Wissenschaft zu verbannen.

Zum andern: ich finde die philosophischen Unterlagen dieser Lehren nicht hinlänglich ausgebildet, und darin den eigentlichen Grund obiger Mängel.

Die Mathematiker pflegen, wie in den rein mathematischen Wissenschaften, die Grundbegriffe mathematische Wahr-

scheinlichkeit, möglicher Fall, mathematische Erwartung u. s. w. mit synthetischen Begriffserklärungen aufzuführen, die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit aber oft, als etwas sich von selbst Ergebendes, keiner besondern Erörterung zu unterwerfen. Dieses genügt aber bei dem großentheils philosophischen Ursprung dieser Begriffe keineswegs zur vollen Deutlichkeit.

Andere Lehrer aber, die dieses eingesehen haben, scheinen mir nur in engländisch-französischer Weise zur philosophischen Begründung der Lehre von der logischen Grundansicht des Bacon von Verulam ausgegangen zu sein. Es stimmen nämlich nach des Aristoteles Lehren von der Induction Locke, Condillac, Hume, Condorcet u. s. w., kurz die ganze engländisch-französische Schule der Untersuchungsphilosophie, auf eine logische Theorie der Ausbildung unsrer Kenntniß allgemeiner Gesetze zusammen, welcher wir in der Schule des Leibnitz widersprechen müssen. Diese Aenderung der philosophischen Grundansicht hat aber auf die ganze Ausbildung unsrer Lehre einen sehr durchgreifenden Einfluß.

In diesen beiden Dingen finde ich allein den Berechtigungsgrund für mich, in dieser Sache mitzusprechen. Laplace hat in seinem großen Werke mit bewundernswürdigem Scharfsinn und Ueberblick der Analysis die große Ausbildung für den Dienst in combinatorischen, Aufgaben gegeben und so in allen seinen Untersuchungen höchst schwierige, rein mathematische Aufgaben mit einer neuen Kunst und großen Behendigkeit lösen gelehrt. Allein die Weise, wie er das Interesse der Untersuchungsphilosophie dahinter stellt und die Anwendbarkeit seiner Rechnungen im Leben voraussetzt, scheint mir oft eine irrige zu sein. Lacroix ist dann auch mehrmals genöthigt gewesen, diese Unanwendbarkeit mancher Methoden zu rügen, aber die Sache scheint mir damit noch nicht vollkommen aufgehellt, sondern durch einen philosophischen Fehler noch im Dunkeln gelassen, dessen Aufhellung grade für unsre philosophischen Interessen so höchst wichtig ist.

Demgemäß muß ich meine Ansicht streitend, theils gegen Laplace, theils gegen Lacroix geltend machen.

Die Sache wird am deutlichsten werden, wenn ich mit einer Beurtheilung dessen anfange, was Lacroix zur Bestimmung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt.

Lacroix behauptet nach Condorcet und mit Locke, daß die einzige vollständige Gewißheit (certitude absolue) dem Bewußtsein einer gegenwärtigen Empfindung und der augenblicklichen vollkommenen deutlichen Vorstellung (perception) von der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung zweier Vorstellungen (de la convenance ou de la disconvenance de deux idées) zukomme. Er sagt ferner: »diese Empfindungen und einfachen Urtheile (jugemens simples), dem Gedächtniß anvertraut, erzeugen Reihen von Folgen, deren Gewißheit von einem neuen Element, nämlich der Treue, womit das Gedächtniß uns das wiedergibt, was wir erfahren haben, abhängt. Das Vertrauen (confiance), welches wir in dieser Hinsicht erhalten, gründet sich nur auf die beständige Wiederholung der Thatsachen (fait) und auf die Sicherheit, daß diese Wiederholung uns jedesmal, wenn wir es wünschen, oder wenn die Umstände es erheischen, die Erneuerung derselben bringe. Hier zeigt sich eine Neigung oder ein Gesetz des menschlichen Geistes als allgemeine Neigung zu glauben an die Wiederkehr von Thatsachen, welche wir mehrmals beobachtet haben, eine Neigung, welche sich mit der Meinung verbindet, die wir sehr bald von der Beständigkeit der Naturgesetze erhalten. Alle Behauptungen, wie die folgenden: jeder Mensch wird sterben, die Sonne wird morgen aufgehen, — haben keinen andern Grund. So viele Thatsachen, denen man bis jetzt keine gut bestätigte entgegen setzen kann, haben die Sterblichkeit des Menschengeschlechts bewiesen; die Sonne ist so viele Male aufgegangen, daß man nicht an der Wiederholung dieser Begebenheit zweifelt, obgleich man sich nicht enthalten kann, einen wesentlichen Unterschied zwischen diesem und dem Bewußtsein einer Empfindung oder der Klarheit eines Urtheils über zwei einfache

Vorstellungen, deren Verbindung deutlich ist, anzuerkennen. Auch ist der Grad der Gewißheit, der auf diesem Wege erhalten wird, der vollständigen Gewißheit sehr nahe; indessen welche Gewährleistung haben wir, daß nicht ein uns noch unbekanntes Naturgesetz die Reihenfolge dieser fast unendlich oft wiederholten Thatsachen ändern werde?«

»Gehen wir nun von Thatsachen, bei denen sich keine Ausnahmen zeigen, zu solchen über, bei denen Ausnahmen stattfinden, so sehen wir nach Abstuffungen des schwächern oder stärkern den Zweifel sich in unsre Gedanken einführen. Je häufiger die Ausnahmen werden, desto schwankender wird das Urtheil. Man wägt die entgegengesetzten Ergebnisse gegen einander ab und bleibt oft unentschieden; muß man aber eine Partie ergreifen, so wird man auf die Seite treten, auf welcher sich die Mehrheit der Fälle zeigt.«

»Es ist wahr, was Hume sagt, daß es richtig gesprochen keinen Zufall (hasard) gibt, aber für uns tritt an dessen Stelle unsre Unwissenheit in Rücksicht der wahren Ursachen der Begebenheiten. Daher entsteht die Wahrscheinlichkeit da, wo wir die Ursachen nicht genau aufzählen, ihre Wirkungen nicht unfehlbar vorhersehen können.«

»Für einen höhern Verstand, der alle Bedingungen eines Ereignisses kennt, ist dieselbe mit vollkommner Gewißheit vorherbestimmt. (Nach den Worten des Laplace: die Regelmäßigkeit, welche die Sternkunde in der Bewegung der Cometen zeigt, findet ohne Zweifel bei allen Erscheinungen statt. Die von einem einzelnen Luft- oder Dunstkügelchen beschriebene krumme Linie ist eben so bestimmt geordnet, wie die Planetenbahnen, mit dem einzigen Unterschiede, daß wir ihre Gesetze nicht kennen.) Aber der Mensch mit seinen beschränkten Kenntnissen kann sich nicht immer aller dieser Bedingungen bemächtigen, dann überdenkt er die Anzeigen, die in seiner Gewalt sind, und wenn dann für ein Ereigniß seine aufeinander folgenden Urtheile öfter bejahend als verneinend ausfallen, so kommt (wie Hume sagt) der Blick seines Geistes öfter auf dies Ereigniß, als auf sein Gegentheil zurück. Meh-

rere solche Blicke concentriren sich auf ein Ereigniß, und dies bestimmt durch einen unerforschlichen Mechanismus der Natur unsern Glauben an dasselbe. Darum siegt ein Ereigniß über das entgegengesetzte, welches weniger solche Blicke für sich hat.«

»Dabei bliebe nichts zu wünschen übrig, wenn wir die Sachen immer dem Wurfe eines Würfels genau gleich stellen könnten, welcher eine gewisse Anzahl mit Farben oder Punkten bezeichneter Seiten hat. Ist die Gestalt des Würfels regelmäßig, die Masse gleichförmig, sind die Umstände des Wurfes gehörig abwechselnd und unvorhergesehen, so daß kein Grund zur Vermuthung bleibt, er werde eher auf die eine als auf die andere Seite fallen, und er z. B. fünf weiße und eine schwarze Seite hätte, so würde unser Geist, indem er die Zahl der weißen Seiten größer als die der schwarzen findet, öfter darauf zurückkommen, das Eintreffen einer weißen, als das einer schwarzen Seite für möglich zu halten, und durch die Wirkung dieser Wiederholung des Urtheils über die Möglichkeit (jugement de possibilité) würde er leichter an das Eintreffen einer weißen, als der schwarzen Seite glauben.«

»Der augenscheinlich einfachste Fall einer Bestimmung von Wahrscheinlichkeit ist der, wo die Anzahl der Erfolge hinlänglich bekannt und jeder von ihnen gleich möglich ist. Dieses ist der Fall beim Würfel. Hier muß das Maaß des Grades von Vertrauen auf das Urtheil für eine Farbe das Verhältniß der Anzahl der bejahenden Urtheile (also der Anzahl der so gefärbten Seiten) zu der Anzahl aller bejahenden und verneinenden Urtheile (der Anzahl aller Seiten des Würfels) zusammengenommen seyn. Dieses Verhältniß, also im vorigen Beispiel $5/6$ für eine weiße Seite, nennt man die mathematische Wahrscheinlichkeit, welche, wie man sieht, bestimmt wird, indem man die Zahl der reinen Ereignisse günstiger gleichmöglicher Fälle mit der Zahl aller gleichmöglichen Fälle dividirt.«

»Der Zweck der Wissenschaft ist hier, solche mathematische Wahrscheinlichkeit an die Stelle gemeiner schwankender Mei-

nungen zu setzen. Wie Condorcet sagt: »Jedermann bemerkt an sich selbst, daß er seine Meinung über gewisse Gegenstände geändert hat nach dem Alter, den Umständen, den Ereignissen, ohne jedoch sagen zu können, daß diese Aenderung sich immer auf neue Gründe gestützt hätte, ohne eine andere Ursache davon angeben zu können, als den stärkern oder schwächern Eindruck, welchen derselbe Gegenstand macht. Aber wenn man anstatt nach diesen Eindrücken zu urtheilen, die einen Theil der Gegenstände vermehren und größer erscheinen lassen, während sie die übrigen vermindern oder der Beachtung entziehen, im Stande wäre die Gegenstände zu zählen und ihren Werth der Rechnung zu unterwerfen, so würde unsre Vernunft aufhören der Sclave jener Eindrücke zu sein.« (Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions etc. Discours prélim. p. 185.) Dieser Wunsch ist unglücklicher Weise noch weit von seiner Erfüllung. Bis jetzt ist nur eine sehr kleine Zahl wahrhaft wichtiger Fragen gelöst, und die Rechnung, wie in andern Gebieten der angewandten Mathematik, oft mißbraucht worden, weil es theils an Kenntniß der Grundsätze, theils an gehöriger Anzahl hinlänglich bestätigter Thatsachen fehlte. Wir werden aber zu weitern Fortschritten gelangen, wenn uns aus der Menge der Beobachtungen, zu welchen das gesellschaftliche Leben die Gelegenheit gibt, durch Nachlässigkeit der Beobachter oder durch Eigenliebe derjenigen, welche ihre Fehler verdecken und den Nachruhm ihrer Vorgänger verdunkeln wollen, nicht mehr so viele verloren gehen werden. Dafür ist vorzüglich das Gesetz wichtig, daß Begebenheiten, welche einzeln betrachtet die zufälligsten zu seyn scheinen, eine regelmäßige Ordnung zeigen, sobald man sie in hinlänglich großer Anzahl betrachtet.«

Dies ist die Gedankenfolge, in welcher uns Lacroix nach der allgemeinen engländisch-französischen Ansicht die philosophischen Grundlagen der Lehre von der Wahrscheinlichkeit mittheilt. So klar dies Ganze und so treffend viele einzelne Behauptungen darin seyn mögen, so haben wir doch sehr

wichtige Gegenbemerkungen zu machen, und der ganzen Lehre wesentlich andere Verhältnisse zu geben.

Die Hauptsätze im Obigen sind:

1) Die einzige vollständige Gewißheit ist bei den augenblicklichen Empfindungen und den augenblicklichen einfachen Urtheilen.

2) Die Naturgesetze gelten mit Nothwendigkeit, ohne einen Zufall zuzulassen.

3) Wenn wir eine Art von Erscheinungen ohne Ausnahme nach einer Regel erfolgen sahen, so setzen wir voraus, dies werde auch ferner so erfolgen.

4) Wenn wir bei der Reihenfolge von Erscheinungen einer Art einen Erfolg nach verschiedenen Regeln beobachten, so sind wir geneigt, den zukünftigen Erfolg so zu vermuthen, wie er in der Mehrheit der Fälle eintreffen kann.

5) Die beiden letzten Gesetze unserer Urtheilskraft werden als Folgen des Gesetzes der Association der Vorstellungen (idées) angesehen.

Vergleichen wir diese Sätze schärfer unter einander, so werden uns einige Mängel dieses Philosophems klar. Nach dem zweiten Satze wissen wir um die Nothwendigkeit der Naturgesetze, und dies kann doch nur mit vollständiger Gewißheit geschehen. Zu dieser Einsicht gelangen wir aber nicht durch die Empfindung, es bleiben also nach diesen Sätzen nur die einfachen Urtheile des ersten Satzes übrig, durch die wir zu einer solchen Einsicht gelangen können. Dann paßt aber die Begriffserklärung »augenblickliche und vollkommen deutliche Wahrnehmung der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung zweier Vorstellungen« gar nicht mehr für diese einfachen Urtheile, sondern jugement simple wäre eben das, was wir Bewußtseyn einer Erkenntniß a priori nennen. Alle unsere Urtheile in den reinen mathematischen Wissenschaften und in der mathematischen Naturphilosophie gehörten dazu. Damit wird aber die Ansicht der Sache wesentlich geändert. Der Fehler dieses Philosophems ist, daß bei der Führung unsrer Untersuchungen durch Inductionen der Einfluß der

vorausgesetzten allgemeinen und nothwendigen Urtheile (nämlich der mathematischen und philosophischen) nicht anerkannt, und anstatt dessen der hier genannte dritte Satz zum Mittelpunkt der ganzen Lehre gemacht wird.

Wenn wir mit höheren Graden der Gewißheit ein zukünftiges oder sonst noch nicht beobachtetes Ereigniß bestimmen, so verlassen wir uns auf die Einsicht in die nothwendigen Gesetze, unter denen es erfolgt, und suchen diesen den einzelnen Fall unterzuordnen, begnügen uns aber keineswegs damit, die bisher beobachteten einförmigen Ereignisse durchzuzählen und darnach ein Resultat zu bestimmen. So berechnen wir aus den bekannten Gesetzen, nach denen jedes Gestirn sich bewegt, den Kalender für zukünftige Jahre. Zum Beispiel: Jemand trifft auf seinen Wanderungen oft an einer Stelle des Flußufers einen Mann mit einem Kahn, und es wird ihm zur Gewohnheit, sich von diesem übersetzen zu lassen. Hat er nun nicht näher bedacht, warum der Mann da verweile, so wird er leicht einmal getäuscht werden, wenn die Geschäfte den Mann mit seinem Kahn wo anders hinführen. Wüßte er hingegen, der Mann sei verpflichtet, den Vorübergehenden zu dienen, so kann er sich sicher darauf verlassen, ihn stets wieder zu finden. Doch könnte er freilich auch dann noch irren, weil das Gesetz, worauf er sich verläßt, nur von menschlicher Anordnung ist; er könnte aber gar nicht irren, wenn anstatt dessen ein Naturgesetz die leitende Regel wäre. So bestimmen wir mit Besonnenheit eine Begebenheit, oder durch Induction eine ganze Art von Begebenheiten im voraus, immer nur vermittelst der Unterordnung unter uns sonst schon mehr oder weniger sicher bekannte leitende Regeln.

Lacroix hingegen setzt im dritten Satz voraus, daß wir bei allen Inductionen nur, wie im ersten Fall des Beispiels, uns auf unbedachte Weise gleichsam blindlings von der Einförmigkeit früherer Erfahrungen führen ließen, ohne auf die ihnen zu Grunde liegenden Gesetze zu achten. Es wird, wie namentlich Hume meinte, die ganze Art wahrscheinlicher Bestimmungen durch Induction nur auf das Gesetz der Er-

wartung ähnlicher Erfolge nach ähnlichen Vorgängen zurück geführt. Dieses Gesetz gehört aber nur der reproductiven Einbildungskraft und ist eine Folge des unsre Gewöhnungen beherrschenden Gesetzes der Association der Vorstellungen, und nicht reine Sache der Urtheilskraft; es ist ein Gesetz des untern und nicht des obern Gedankenlaufes. Dieses Gesetz leitet allerdings die Erwartungen jedes unmündigen Kindes, vorherrschend die des gemeinen Haufens, aber die des erfahrenen Mannes nur, wenn er über die Sache eben *nicht näher nachdenkt.* Nehmen wir das obige Beispiel der Erwartung des morgenden Sonnenaufgangs. Denke ich über dieses Ereigniß nicht näher nach, so erwarte ich es ruhig auf morgen wieder, nicht, weil ich gehört habe, daß sich dies seit Jahrtausenden regelmäßig so zutrage, sondern nur, weil ich gewohnt bin, diesen Wechsel von Tag und Nacht zu durchleben. Ueberlege ich mir dagegen die Sache, so finde ich nun die Bestimmungsgründe dieser Erscheinung in den Gesetzen der täglichen und jährlichen Bewegung der Erde, daneben zeigt sich mir nichts, was diese Erfolge in der nächsten Zeit stören könne, und demgemäß *urtheile* ich erst über die Sache. Diesmal in Uebereinstimmung mit der Gewohnheit. In vielen andern Dingen aber tritt dieses besonnene Urtheil grade in Widerstreit mit den Vorstellungen, welche uns die Gewohnheit aufnöthigt, so z. B. bei der Schätzung der Entfernung und Größe von Sonne und Mond. Wir müssen also die ganz dem untern Gedankenlauf überlassenen Vorstellungsspiele der Gewohnheit und mit ihnen diese unbesonnene Erwartung ähnlicher Fälle wohl von der besonnenen Beurtheilung unterscheiden, und *werden auch nur da von Wahrscheinlichkeit reden, wo diese für das besonnene Urtheil bestimmt ist.*

Wo wir die Gesetze, nach denen gewisse Begebenheiten erfolgen, gar nicht näher kennen, bleiben freilich auch unsre Meinungen zu Hoffnung und Furcht nur dieser Ruhe der Gewohnheit überlassen. Bei uns fürchtet in der Regel Niemand die Zerstörungen durch Erdbeben, oder die Umwandlung

der Erdoberfläche durch einen Kometen. Machen wir aber einmal in Tagblättern darauf aufmerksam, wie wenig wir hier voraus wissen, so wird gar leicht auf einige Zeit die gemeine Meinung, wenigstens zur Unterhaltung, lebhaft von dieser Furcht ergriffen werden. Hören wir von Lima erzählen, so denken wir gleich an die Erdbeben, die dort so oft zerstören oder Zerstörung drohen; aber die Mädchen dort tanzen so fröhlich und sorglos wie die unsern. Ich ging eines Abends mit einem französischen Officier durch St. Maurice in Wallis. Dort hängen Felsenwände hoch über die Häuser herein, wir beobachteten die Beschädigungen der Wände durch Steine, die von Zeit zu Zeit von dort herabfallen. Ein Schuhmacher saß vor seinem Hause mit seiner Arbeit, der Officier fragte ihn: »und Ihr, ihr fürchtet die Steine von da oben nicht?« — Jener erwiederte treffend: »und Ihr im blauen Rock, wie könnt Ihr mich das fragen?« — Die Gewohnheit hat so ihre eignen Gebiete im Reich unsrer Meinungen, die ihr auch die Wissenschaft vom Wahrscheinlichen nicht streitig machen wird. Aber in vielen andern Fällen steht es anders, da vermögen wir für ein besonnenes Urtheil die leitenden Regeln mehr oder weniger sicher zu bestimmen, — und diesen Fällen dient die Wissenschaft.

Dies ist nun auch in den obigen Betrachtungen von den französischen Philosophen anerkannt, sie setzen eben die mathematische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit durch Zahl und Rechnung dem unbedachten Annehmen trüber und schwankender Meinungen entgegen. Allein sie irren dabei erstlich darin, daß sie die Bestimmungsgründe der mathematischen Wahrscheinlichkeit nur auf eine regelmäßige Weise in derselben Art von Bestimmungsgründen suchen, wie bei unbedachter Gewöhnung, und zweitens darin, daß sie alle besonnene Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für mathematische Wahrscheinlichkeit nehmen, da doch die Wissenschaften so viele Wahrscheinlichkeiten anbieten, die sich gar nicht auf Zahl und Rechnung bringen lassen,

Unser Logik muß daher, um die Aufgabe der Wahrschein-

lichkeitsrechnung festzustellen, mehrere Unterscheidungen vorauszuschicken, wie das Folgende zeigen soll.

§. II.

In unsern Beurtheilungen stehen Behauptungen mit vollständiger Gewißheit, und andere nur nach größern oder kleinern Graden der Gewißheit neben einander. Was wir nach Graden der Gewißheit behaupten, nennen wir wahrscheinlich.

Sachen der vollständigen Gewißheit sind alle einzelne Thatsachen, die wir anschaulich erkennen, alle nothwendigen Wahrheiten oder Erkenntnisse a priori (das heißt, die mathematische und rein philosophische Erkenntniß) und alles dasjenige, was nach vollständigen Schlüssen aus der Verbindung dieser beiden Bestandtheile unsrer Erkenntniß folgt. Sachen der Wahrscheinlichkeit sind dagegen alle die allgemeinen Behauptungen, welche wir nur durch die Erfahrung bestimmen, nebst alle dem, was aus diesen gefolgert wird.

Um aber diese Begriffe scharf anzuwenden, müssen wir die hier geforderten Sachen der Gewißheit wohl unterscheiden, von dem augenblicklichen Ausspruch, den ein einzelner Mann thut. Wir behandeln die Sachen der Gewißheit als Eigenthum der Wissenschaft, welche Wissenschaft nicht die augenblickliche Behauptung eines einzelnen Menschen ist, sondern der gebildeten Menschheit gehört, und in der Gesellschaft der Gebildeten ausgebildet wird. Gegen diese Wissenschaft hat der augenblickliche Ausspruch eines Mannes immer nur den Werth einer Meinung.

Durch Mängel der Erinnerung kann ein Mann gelegentlich ein unsicheres Urtheil bekommen selbst über Thatsachen, die er selbst beobachtet hat; der Wissenschaft bleiben viele Thatsachen ganz unbekannt, viele werden ihr durch Mängel der Ueberlieferung unsicher, aber ein großer Schatz von Thatsachen in Naturkunde und Geschichte steht in der Wissenschaft mit vollständiger Gewißheit fest. Der größte Mathematiker

kann sich vielleicht bei einem einfachen Zusammenzählen wiederholt verzählen, aber darum sind die Gesetze der Addition nicht Sachen der Wahrscheinlichkeit, sondern sie gehören der mathematischen Wissenschaft zu ihren großen Schätzen von vollständiger Gewißheit. Endlich mag der Ausspruch nothwendiger philosophischer Wahrheiten noch so lange streitig bleiben, jeder denkende Mensch setzt doch unvermeidlich diese Grundbestimmungen seiner Denkweise in jedem richtigen oder irrigen Urtheil als wahr voraus. Jeder Mensch setzt so mit vollständiger Gewißheit voraus, daß die wechselnden sinnlichen Erscheinungen Eigenschaften und Zustände von Wesen seyen, daß der Wechsel der Begebenheiten nach nothwendigen Gesetzen bewirkt werde, und so das Aehnliche. Auch diese rein philosophischen Erkenntnisse sind der Wissenschaft Sachen der vollständigen Gewißheit. Hingegen jede Bestimmung allgemeiner Naturgesetze durch die Erfahrung bleibt der Wissenschaft von wahrscheinlicher Bestimmung, wenn wir gleich in vielen Fällen den Grad der Gewißheit so hoch steigern können, daß wir sie von vollständiger Gewißheit nicht mehr unterscheiden.

In allen diesen Gebieten nun soll die Wissenschaft ihre Behauptungen von den blinden Einflüssen der Gewohnheit und der Erwartung ähnlicher Fälle ganz befreien. Dafür gibt die logische Methodenlehre ihre Regeln. Diese aber unterscheidet die Methoden des Empirismus und der Speculation von denen der Induction. Empirismus und Speculation sind Methoden, um die Wissenschaft zu vollständiger Gewißheit zu führen; der Empirismus durch die Sicherstellung der Thatsachen vermittelst der Beobachtung, die Speculation durch die wissenschaftliche Entwicklung reiner mathematischer und philosophischer Lehren. Die Induction hingegen soll durch Erfahrung der Natur ihre Gesetze abfragen, und dahin gehören alle Methoden der Wahrscheinlichkeit. Nur diese Fälle können uns hier in Frage kommen, aber eben für sie müssen wir noch weiter die berechenbare Wahrscheinlichkeit von allen Arten der nicht zu berechnenden scharf

unterscheiden, und dadurch erst genau die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmen.

Dies soll die folgende Darstellung leisten.

§. III.

Jedes menschliche Urtheil läßt sich zunächst nur als eine Frage oder Aufnahme auffassen, zu welcher wir, um es zur Behauptung zu erheben, in der Antwort erst Gründe der Wahrheit desselben hinzubringen müssen. Diese Gründe der Wahrheit bestimmen die Gewißheit der Behauptung. Enthält die Antwort vollständige Gründe, so ist auch die Gewißheit vollständig; enthält sie nur theilweis die Gründe, so erheben sich über Ungewißheit und Zweifel allmählig höhere Grade der Gewißheit.

Die Gründe der Wahrheit finden wir nun für vollständige Gewißheit theils bei Demonstrationen unmittelbar in der Anschauung, theils bei Deductionen unmittelbar in den Grundwahrheiten der nothwendigen Erkenntniß, theils endlich bei vollständigen Schlüssen mittelbar in den vorigen als Voraussetzungen dieser Schlüsse.

Neben dem stehen dann noch die Behauptungen durch unvollständige Schlüsse, bei denen wir in den Voraussetzungen die Gründe des Urtheils nicht vollständig, aber doch auf eine überwiegende Weise zu bestimmen vermögen. Eine solche Behauptung aus überwiegenden Gründen heißt eine wahrscheinliche Behauptung, und muß nach dem Maaße des Uebergewichts der Gründe Grade der Gewißheit bei sich führen. Die unvollständigen Schlüsse, durch welche wir zu diesen Behauptungen geführt werden, heißen deswegen Wahrscheinlichkeitsschlüsse.

Jeder Schluß bestimmt seinen Schlußsatz aus einer allgemeinen Regel. Ist diese Regel vollständig bekannt, so bestimmt sie ihren Schlußsatz mit vollständiger Gewißheit. Soll dagegen ein unvollständiger Schluß entstehen, so müssen wir eine allgemeine Erkenntniß voraussetzen, deren Umfang getheilt ist, nach diesen Theilungsstücken betrachtet wird, und

nun zwar so, daß wir den Schlußsatz vermittelst einiger von diesen Theilungsstücken zwar unvollständig, aber doch auf überwiegende Weise bestimmen.

Allein aus einer unvollständigen Regel folgt kein Schlußsatz. Absolut genommen würde die Urtheilskraft in allen diesen Fällen ihr Urtheil aufschieben und nichts behaupten. Daher erfordert jeder Wahrscheinlichkeitsschluß noch zweierlei, nämlich erstens eine Entscheidung des Glaubens, zweitens eine Entscheidung der Meinung in ihm.

1) Glaube. Unser Urtheil ist vollständig gewiß, sobald wir vollständige Gründe desselben haben. Bleiben die Gründe aber unvollständig, so gelangen wir gar nicht zum Urtheil, wenn uns nicht ein Bedürfniß treibt, die Behauptung zu wagen. Die Belebung der Urtheilskraft durch das Interesse dieses Bedürfnisses ist der hier geforderte logische Glaube. Nun erst suchen wir überwiegende Gründe für oder wider eine solche Behauptung und bestimmen mit diesen.

2) Unsere Meinung. Meinung ist also die Entscheidung, daß für eine Behauptung überwiegende Gründe vorhanden seien. Der Glaube muß hier unsre Untersuchung beleben, aber er darf sich nie in die Bestimmungsgründe der Behauptungen einmengen. Diese sind nur die Sache der Meinung.

Nach den Verhältnissen der Meinung theilen sich nun die Wahrscheinlichkeitsschlüsse in die philosophischen und die mathematischen.

§. IV.

Die philosophischen sind die Inductionen, die Hypothesen und die Analogieen, von denen ich in der Logik gezeigt habe, wie sie alle auf der Schlußweise der Induction beruhen, in welcher wir durch die Vielheit der Fälle die Einheit der Regel zu errathen suchen. Wenn wir in Reihenfolgen der Erscheinungen eine Regelmäßigkeit des Erfolges beobachten, so versuchen wir diese Regelmäßigkeit als ein Naturgesetz aufzustellen und so als Erklärungs-

grund in die Wissenschaft einzuführen. Der Glaube wird hier immer durch das wissenschaftliche Interesse unsers Geistes bestimmt, welches uns treibt, die erscheinende Regelmäßigkeit als Gesetz auf die Probe zu nehmen, da wir schon wissen, daß die Erscheinungen unter Gesetzen stehen. Das Ueberwiegende der Gründe, welches unsre Meinung bestimmt, besteht aber hier nicht in der Vielheit der beobachteten Fälle, sondern in der strengen Unterordnung des fraglichen Gebietes unter schon bekannte Naturgesetze, welche hier als leitende Maximen unsere Meinungen leiten.

Bei diesen philosophischen Wahrscheinlichkeiten kommt es auf keine Abwägung zwischen Gründen und Gegengründen an, denn kein Naturgesetz leidet Ausnahmen, und die Induction ist gleich vernichtet, wenn sich nur irgend eine Ausnahme findet.

Das Ueberwiegende der Gründe liegt hier in der ganzen wissenschaftlichen Ausbildung desjenigen, der sich einer Induction überläßt, und kann nie auf Zahlen gebracht werden.

So verführt den Unwissenden und Abergläubigen jeder Anschein von Regelmäßigkeit, jeder Anschein eines Verhältnisses von Ursache und Wirkung, jeder anscheinende Erklärungsgrund. Den Kundigen hingegen führt nur der ganze Zusammenhang wissenschaftlicher Gesetze. Die Entdeckung neuer Gesetze in der Physik und Chemie wird nie durch dies Zusammenzählen einzelner Beobachtungen, sondern nur unter dem Schutze richtiger leitender Maximen, und dann oft mit einer einzigen Erfahrung erhalten.

§. V.

Der mathematische Wahrscheinlichkeitsschluß ist hingegen von ganz anderer Natur. Hier müssen wir eine gewisse Sphäre der Erkenntniß und die allgemeinsten Gesetze derselben kennen; allein die Bestimmung der einzelnen Fälle hängt noch von andern Einwirkungen ab, welche nicht nach einer Regel erfolgen und für welche wir das Gesetz ihres Wechsels nicht kennen.

Wir wissen hier, daß uns für das einzelne Ereigniß,

welches wir voraus bestimmen wollen, keine feste Regel bekannt sei, suchen aber eine Uebersicht aller im Umfang der fraglichen Erkenntniß möglich bleibenden Fälle zu bestimmen, und daraus eine Behauptung für den einzelnen Fall abzuleiten.

Das Interesse, welches hier unsern Glauben leitet, können wir im Allgemeinen eine Wette nennen und die Bestimmung der Meinung macht sich immer dadurch, daß wir unser Urtheil der Mehrheit der aufgefundenen möglichen Fälle gemäß bestimmen.

Hier ist das Verhältniß der überwiegenden Gründe allerdings immer ein Größenverhältniß, allein wir müssen dabei doch die unberechenbaren subjectiven Wahrscheinlichkeiten von den berechenbaren objectiven noch wohl unterscheiden.

Soll eine Sache nicht nur mir wahrscheinlich vorkommen, sondern wissenschaftlich als wahrscheinlich bestimmt werden können, so müssen wir uns nicht nur auf Grade der überwiegenden Gründe berufen, sondern die Verhältnisse der möglichen Fälle nach Zahlen zu bestimmen und die vollständige Uebersicht aller Fälle zu geben im Stande seyn.

§. VI.

Wir unterscheiden also die berechnungsfähige Wahrscheinlichkeit erstlich von aller philosophischen Wahrscheinlichkeit, nach deren Regeln wir die empirische Naturlehre ausbilden, und zweitens auch von allen nach Art der mathematischen Wahrscheinlichkeit bestimmten Vermuthungen, bei denen das Uebergewicht der Gründe nur nach dem Gefühl abgeschätzt und nicht berechnet werden kann, von jenen subjectiven Wahrscheinlichkeiten, auf die hin die Klugheit im thätigen Leben so oft ihre Ausführungen wagen muß, mit deren Hülfe allein wir so oft über vergangene Thatsachen zu urtheilen vermögen. Franklin*) liebte es, solche unbestimmte subjective Wahr-

*) Lacroix, Traité élém. du Calc. des prob. p. 297.

scheinlichkeiten nach der Analogie einer Rechnung durch Aufheben gleich stark geschätzter Gründe und Gegengründe für einen Entschluß zu beurtheilen und zu entscheiden. Das wird aber immer nur ein Spiel des vergleichenden Witzes bleiben.

Aus dem Ganzen aller unsrer Urtheile mit Wahrscheinlichkeit hebt die Wahrscheinlichkeitsrechnung die berechnungsfähigen heraus und behandelt sie wissenschaftlich nach den eigenthümlichen Methoden, die wir hier der Kritik unterwerfen wollen.

Die Bedingungen, unter denen eine berechnungsfähige Wahrscheinlichkeit erhalten werden kann, sind in dem eben Besprochenen angedeutet. Es wird nach einem Ereigniß oder einer Reihenfolge von Ereignissen gefragt, von denen wir wissen oder voraussetzen, daß sie unter sich gleich bleibenden Gesetzen im Allgemeinen stehen, so daß dadurch eine bestimmte Sphäre der Erkenntniß eingegrenzt wird, jedoch so, daß für die Bestimmung des einzelnen Falles noch veränderliche Bedingungen hinzukommen, die ich zwar nicht für den einzelnen Fall zu bestimmen vermag, für die ich aber im Allgemeinen abzuzählen im Stande bin, von wie vielerlei Arten sie allein seyn können und wie oft die eine Art im Verhältniß zu der andern im Allgemeinen eintreffen werde.

So können wir dann den fraglichen Umfang der Erkenntniß in eine bestimmte Anzahl gleich möglicher Fälle eintheilen, darnach berechnen, was in der Mehrheit der Fälle eintreffen müsse, und demgemäß unsere Vermuthungen leiten.

Die regelmäßigsten Fälle der Anwendung sind die Hazardspiele, z. B. mit Würfeln, Karten oder in Lotterieen. Hier machen wir künstlich durch die Regeln des Spiels eine solche Sphäre der Erkenntniß, welche aus einer bestimmten Anzahl gleich möglicher Fälle zusammengesetzt wird, und unter der Bedingung, daß, welcher von diesen Fällen das einzelne Mal treffen werde, nicht soll vorher gewußt werden können.

Nehmen wir z. B. das Würfelspiel. Der Wurf gilt nicht, wenn der Würfel zerbricht oder nicht eine seiner Seiten grade oben zeigt; der Würfel taugt nicht, wenn er leichter die eine Seite, als die andere zeigt; der Wurf ist nicht ehrlich, wenn er mit der Geschicklichkeit geführt wird, eine beabsichtigte Seite oben zu bringen. Unter diesen Regeln bleiben dann die sechs Fälle, daß eine der Seiten oben fällt, die einzigen möglichen, und für jeden derselben sind die Bedingungen des Eintreffens die nämlichen. Es gibt hier nur sechs und zwar gleich mögliche Fälle. Spielen wir dann mit zwei Würfeln, so kann neben jeder Seite des einen jede des andern fallen, es gibt hier nur 6 mal 6 oder 36 Fälle, die alle gleich möglich sind.

§. VII.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich nun damit, in geeigneten Fällen die Eintheilung der Sphäre einer Erkenntniß in ihre gleichmöglichen Fälle zu bestimmen, und mathematische Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Voraussetzung nennen wir hier das Verhältniß der Anzahl von gleichmöglichen Fällen, unter denen sie eintreffen muß, zur Anzahl aller gleich möglichen Fälle. Dieser steht dann eine Wahrscheinlichkeit, daß diese Voraussetzung nicht eintreffen werde, entgegen, als das Verhältniß aller übrigen Fälle zur Zahl der Fälle überhaupt. Das Spiel mit zwei Würfeln z. B. hat 36 mögliche Fälle, unter denen ist der Wurf beider Sechsen nur einer. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Wurf eintreffen werde, das Verhältniß $1:36$, und das entgegengesetzte $35:36$. Unter den 36 Fällen sind 6 Pasche, also der sechste Theil der Fälle ist ein Pasch, und die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, $1:6$, die entgegengesetzte $5:6$.

Ist die Zahl aller Fälle a, und die der Fälle einer Voraussetzung, welche wir die günstigen Fälle nennen, x, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Voraussetzung $x:a$, und die wider dieselbe $(a-x):a$.

2) Wir setzen daher die volle Gewißheit = 1, und geben jeder Wahrscheinlichkeit ihrem Verhältniß gemäß den Werth eines Bruches. So sagen wir, die Wahrscheinlichkeit für den Wurf beider Sechsen ist $^1/_{36}$, die wider ihn $^{35}/_{36}$. Daraus ergibt sich der Hauptsatz: die Wahrscheinlichkeit für eine Voraussetzung mit allen wider sie zusammengezählt ist immer = 1, gleich der vollen Gewißheit.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat es also nicht unmittelbar mit dem Ordnen unsrer unsichern Behauptungen, nicht unmittelbar mit dem Wetten selbst zu thun, sondern ihr gehören zunächst grade die sichern Gesetze, unter denen sich irgend eine Sphäre der Erkenntniß in eine bestimmte Anzahl gleich möglicher Fälle theilt.

Die Bestimmungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten also nicht das unsichere Spiel der Ereignisse, sondern nur die festen Gesetze, unter denen das unsichere Spiel steht. Das Glück oder Unglück der Würfelspieler bleibt dem Leben, die Wahrscheinlichkeitsrechnung beurtheilt nur die Regeln des Würfelspiels und hat mit den Spielen selbst nichts zu thun.

So verstehen wir uns über die Verschiedenheit der philosophischen und mathematischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit. Weil aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Regel der Eintheilung der Sphäre in ihre gleichmöglichen Fälle, und nicht das unsichere Spiel der Ereignisse innerhalb dieser Sphäre betrifft, so vereinigen sich doch beide für die Methoden der inductorischen Wissenschaften.

Dafür müssen wir noch eine andere Unterscheidung machen. Alle unsre Beurtheilungen nach Wahrscheinlichkeit schließen entweder von der Beobachtung auf allgemeine Gesetze, oder sie ordnen Einzelnes allgemeinen Gesetzen unter. Ihre Schlüsse sind im ersten Fall inductorische, im andern conjunctive. Der philosophische Wahrscheinlichkeitsschluß ist hier nun eigentlich die philosophische Induction, welche uns die Gesetze der Erfahrungswissenschaften finden läßt. Damit verbinden sich aber in Wissenschaft und Leben jene conjunctiven Schlüsse aus überwiegenden Gründen, deren Verhältnisse sich doch

nicht abzählen lassen, wie der Ackermann dies Jahr eine gute Ernte, der Winzer eine reiche Weinlese vermuthet, oder wie wir aus der Petrefactenkunde die Pflanzen- und Thierarten eines vorübergegangenen Lebens der Erde bestimmen. Dagegen ist es der Berechnung der Wahrscheinlichkeit ebenfalls um eine Induction, nämlich um die mathematische Induction zu thun, durch welche wir die Gesetze bestimmen, nach welchen eine Sphäre in ihre verschiedenen Theile getheilt wird. Dem entspricht dann das wirkliche Spiel der Welten nach conjunctiven Schlüssen.

Bei mathematisch richtig geordneten Hypothesen und den constitutiven Theorieen der angewandten Mathematik führt die philosophische Induction, wie im glänzenden Beispiel der Astronomie, zu ganz gesicherten Theorieen. Diesem Werk schließen sich dann die Bestrebungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, indem ihre Inductionen auch nur da gelten, wo man genau mit Zahl und Maß verfahren kann; aber ihnen bleiben die Umstände, wo die Erscheinungen durch sehr viele veränderliche Ursachen bestimmt werden, so daß die Regelmäßigkeit ihres Wechsels nur durch genaue Vergleichung sehr vieler Fälle errathen werden kann. Dafür verweise ich auf die ersten Paragraphen meiner mathematischen Naturphilosophie, auf §. 105 und §. 128 im System der Logik, und besonders auf §. 15. im Lehrbuch der Physik.

§. VIII.

Bedenken wir diesen Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit als des Verhältnisses der Anzahl für ein Ereigniß günstiger, gleich möglicher Fälle zur Anzahl aller gleich möglichen Fälle überhaupt, so wird leicht klar werden, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nur Anwendungen der Durchschnittsrechnung enthalte, indem sie sich mit der Auffindung mittlerer Verhältnißzahlen für die in einem Ganzen neben einander möglichen Voraussetzungen beschäftigt, indem sie mittlere Verhältnißzahlen bestimmt, bei denen man im Durchschnitt am wenigsten irren wird.

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nach Zahlen hat nur wissenschaftliche Bedeutung, weil und wiefern diese Durchschnitte und ihre mittlern Verhältnißzahlen mit vollständiger Gewißheit bestimmt sind, sie findet nur Bedeutung und Anwendung für den Standpunkt der Betrachtung, für den diese Gewißheit gilt. Diese Bemerkung wird uns zur Beurtheilung der besondern Methoden sehr wichtig werden.

Im Allgemeinen ist hierdurch gleich bestimmt, daß die mathematische Wahrscheinlichkeit einer Voraussetzung an sich für die Vorausbestimmung nur eines einzelnen Ereignisses gar keine Bedeutung habe. Diese Bedeutung kann immer erst eintreten, wenn wir für eine hinlänglich große Reihe von Ereignissen einer Art den Ueberschlag machen. Wenn z. B. zwei Personen mit einem Würfel unter der Bedingung fortgesetzt spielen, daß A auf die 6, B aber nur gegen die 6 hält, so hat B immer 5 Fälle von Sechsen und A nur einen Fall für sich. Das Pari unter ihnen fordert also, daß B 5 und A nur 1 einsetze. Wollen wir dies aber auf ein Spiel anwenden, welches nur mit einem einzigen Wurf des Würfels unter jener Bedingung abgethan seyn soll, so findet eigentlich das Pari gar keine Bedeutung, hier giebt es keinen Durchschnitt von 5 Fällen gegen einen, sondern die Sache ist in der Natur schon vollständig entschieden, der Würfel wird eine bestimmte Zahl zeigen, wir wissen aber nicht, welche. Machen wir hier doch das Pari gelten, so täuschen wir uns nur durch die Verwechselung unsrer allgemeinen Begriffe mit dem einzelnen wirklichen. Für zehn tausend Personen von bestimmtem Alter kann ich mit großer Genauigkeit eine mittlere Lebensdauer und dann auch eine wahrscheinliche Lebensdauer im Durchschnitt bestimmen. Griffe ich aber aus diesen eine allein heraus, so hat dieses wahrscheinliche Lebensalter für sie gar keine Bedeutung. Wenn wir also hier bei dem Verkauf und Kauf nur einer einzelnen Leibrente die Rechnung nach dem Pari jener Durchschnittszahl stellen, so ist dies wieder eigentlich ohne alle Bedeutung.

Diesem gemäß ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung eigent-

lich die **Durchschnittsrechnung für unsichre Erfolge**, und es wird uns für die Anwendung sehr wichtig werden, diesen Begriff genau festzuhalten. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist immer eine solche Durchschnittszahl, und nur so kann der Begriff einer Berechnung zu Grunde gelegt werden. Man muß daher in diesen Dingen noch zwischen der **mathematischen Wahrscheinlichkeit** und einer **bloß billigen Bestimmung** einen Unterschied machen. Gesetzt, eine Gesellschaft verkauft Leibrenten an sehr viele Theilnehmer, so kann sie ihre Rechnungen nach der mathematischen Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichen Lebensalters stellen. Es wird aber auch Bedürfniß, gelegentlich vor Gericht das wahrscheinliche Lebensalter eines einzelnen Menschen festzusetzen, z. B. wenn der jetzige Werth eines jährlichen Legates bestimmt werden soll. Hier kann der Gesetzgeber nur mit einer gewissen Willkühr entscheiden, und da er der ganzen Gesellschaft gegenüber steht, wieder mit Billigkeit entscheiden, es solle für Jeden nach seinem mittleren Lebensalter gerechnet werden. Dies gilt aber nur um des gesetzlichen Bedürfnisses willen.

Will hingegen nur einzeln B eine Leibrente von A kaufen, so kann A sagen, du kannst 90 Jahre und darüber alt werden, ich darf es daher nicht wagen, dir so viel zu verwilligen, als die Berechnung nach mittlerem Lebensalter fordert. Erinnert B dagegen, aber ich kann auch morgen schon sterben, und dann ist der Gewinn dein, so kann A erwiedern, du sprichst ganz billig, aber ich kann so viel nicht wagen, ich kann auf das Geschäft nur unter geringerer Belästigung für mich eingehen. Die feste Rechnung hat zwischen uns Zweien keine Bedeutung.

§. IX.

Diesem gemäß wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung aus den gewählten Grundbegriffen erstlich eine **reine Theorie** enthalten, in welcher die Verhältnisse gleichmöglicher Fälle in einem gegebenen Ganzen in abstracto berechnet werden, und dann **Lehren der Anwendung** dieser Rechnungsarten auf Menschenleben und Naturwissenschaft.

Die reine Theorie theilt sich ferner nach zwei Hauptarten von Aufgaben.

1) Bei der ersten Art oder der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a priori ist das Ganze nebst der Theilung desselben in gleich mögliche Fälle gegeben; es werden die Durchschnittszahlen für die Verhältnisse der unsichern einzelnen Ereignisse demgemäß bestimmt.

2) Bei der zweiten Art oder der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori sehen wir hingegen Reihenfolgen beobachteter Ereignisse unter Gesetzen einer solchen in gleichmögliche Fälle getheilten Sphäre erfolgen, aber wir kennen die getheilte Regel noch nicht und wollen sie erst durch die Beobachtung bestimmen. Wir sehen also hier eine Art von Begebenheiten immer unter denselben, aber selbst nicht zu berechnenden allgemeinsten Bedingungen erfolgen, dabei aber jede einzelne Begebenheit durch viele nicht zu berechnende veränderliche nähere Ursachen bestimmt werden, die jedoch im Ganzen innerhalb bestimmter Schranken wirken. Man soll durch die Beobachtung die Verhältnisse der Durchschnittszahlen günstiger und ungünstiger Fälle und das Gesetz der Veränderung dieser Verhältnißzahlen bestimmen.

Diese reinen Theorieen haben nun fast nur Gesetze der Combinationslehre anzuwenden, und die Gesetze der Anwendung der Wahrscheinlichkeit a priori gehen einfacher denselben Weg weiter. Hingegen die angewandten Lehren der Wahrscheinlichkeit a posteriori hängen auf schwierigere Weise von den philosophischen methodischen Grundbestimmungen ab. Fangen wir hier an auszuführen, so wird für den mathematischen Zusammenhang der Untersuchungen nach und nach immer deutlicher, daß wir es eigentlich mit der ganz allgemeinen Aufgabe zu thun haben: Theorie und Anwendung derjenigen Näherungsmethoden zu geben, nach denen wir die Kenntniß solcher Naturgesetze erlangen, welche nicht hinlängliche Schärfe der Berechnung zulassen, um jeden einzelnen Fall vollständig zu bestimmen, welche aber doch eine meßbare Auffassung ihrer allgemeinen Verhältnisse, oder auch eine allmäh-

liche Annäherung an immer größere Genauigkeit möglich machen. Der allgemeinere Theil dieser Untersuchungen wird analytisch ausgedrückt sagen: man soll näherungsweis die Functionsformen bestimmen, nach denen unter bestimmten Naturgesetzen die Größen von einander abhängig bleiben.

Die Arten hierher gehöriger Aufgaben können in folgender Weise aufgezählt werden.

1) Da die Wahrscheinlichkeitsrechnung die unbestimmte Durchschnittsrechnung ist, so liegt ihren Anwendungen die Bestimmung mittlerer Werthe im Allgemeinen, wie z. B. für Barometer, Thermometer, Getreidepreise, Arbeitslohn u. s. w., zu Grunde, und die Untersuchungen treffen die Wahrscheinlichkeit, wenn die Durchschnitte hier unbestimmt werden. So wird die erste Aufgabe mittlere Werthe aus einer Reihe von ungenauen Beobachtungen zu bestimmen suchen, sowohl um bei gegebener Functionsform aus den Beobachtungen die constanten, als auch um erst die Functionsform zu bestimmen.

2) Interpolation in gegebene Reihen von Beobachtungen unter demselben Gesetz.

3) Die mathematische Induction in der Naturlehre. Abgesehen von Hypothesen und Erklärungsgründen, soll aus den Beobachtungen allein berechnet werden, ob in gewissen Arten von Naturerscheinungen eine bestimmte Gesetzmäßigkeit herrsche oder nicht.

Z. B. Gilt die tägliche Periode der Barometerveränderungen, wie in der heißen Zone, auch in den andern? Wirkt der Mond auf das Barometer? Wirkt er zur Aufheiterung oder Trübung der Luft? Wie schadet reine Krankheit? Nutzt ein Arzneimittel? Wirkt eine bestimmte cameralistische, polizeiliche, finanzielle Maßregel?

Hier stehen philosophische und mathematische Induction neben einander. Sollen allgemeine Naturgesetze erforscht werden, z. B. die allgemeine Theorie der Schwere, die Gesetze der Chemie, des Lichtes, der Elektricität; so ordnet die philosophische Induction den Gedankengang. Wenn aber das Ge-

setz für einzelne Fälle aus Thatsachen bestimmt werden soll, z. B. die Localverhältnisse der Schwere an bestimmten Orten der Erde, die Gestalt der Erde u. s. w., so kommt immer die mathematische Wahrscheinlichkeit mit in Frage.

Diese mathematischen Inductionen sind es vorzüglich, durch welche noch viele Gebiete der Naturlehre strenger ausgebildet werden sollten. Sie soll den gesunden Verstand neben den richtigen Methoden der philosophischen Induction und allen Methoden der nicht berechenbaren Wahrscheinlichkeit im Kampf mit Aberglauben und Vorurtheilen anwenden, um die Helligkeit des Geistes, die Aufklärung zu fördern. Hier hat unsre Lehre die großen Interessen für die Methoden der Erfahrungsphilosophie zu beachten, aber eben hier müssen wir auch vor den übertriebenen Erwartungen des Condorcet und der Seinigen warnen. Der Einfluß, den man von solchen Berechnungen auf bessere Beurtheilung sittlicher und anderer geistiger Lebensverhältnisse erwartete, wird sich nie bewähren, wir werden vielmehr alle jene Zahlenformeln über die Sicherheit von Zeugenaussagen und Abstimmungen von der Hand weisen und einen großen Apparat der Tabellen-Statistik verwerfen.

Hier soll unsre Rechnung lehren, die Beobachtungen zu sammeln und gehörig zu ordnen. In all diesen Dingen können nur treulich aufbewahrte Zahlen als Resultate lange fortgesetzter Beobachtungen sichre Aufklärung gewähren. Dies betrifft alle Verhältnisse der Sterblichkeit unter den Menschen, das Urtheil über Gefährlichkeit der Krankheiten und so viele andere Gegenstände der Naturbeobachtung. Jede Hypothese zur Erklärung solcher Erscheinungen, wie Andauer der Salzquellen, der heißen Quellen, der Vulkane u. s. w. kann nur etwas bedeuten, wenn sie Zahlen und Maße bestimmt unterzulegen im Stande ist. So müssen wir uns die Gegenstände unsrer Betrachtungen in der politischen Arithmetik und in der Naturkunde erst sorgfältig aussuchen. Da giebt es gar viele Gegenstände der Regierungskunst, der Gesetze, Sitten, über welche ein zerstreutes allgemeines Urtheil im Volk, seit so lange es sich gleich geltend macht, doch keine Sicher-

heit gewährt, wo nur bestimmte Zahlen sichrer Beobachtungen feste Ergebnisse schaffen. Dafür sagt Lacroix*): »Es giebt keine Maßregel der Regierung, welche nicht viele Privatinteressen verletzt, und wenn diejenigen, welche dies trifft, Einfluß haben, zu reden, oder für sich reden zu lassen wissen, so können selbst die für den größten Theil des Volks vortheilhaftesten Maßregeln nicht bestehen; einige Nachtheile, welche mit Kraft oder Geschicklichkeit geltend gemacht worden, lassen sie zurücknehmen, während eine genaue Aufzählung ihrer Wirkungen unwiderleglich das Uebergewicht ihrer Vortheile nachgewiesen haben würde. Wer das richtige Verfahren nicht beobachtet, wird oft mit dem besten Willen gegen solche Maßregeln sprechen.«

»Um ein Beispiel zu geben, wie selbst die einfachsten Dinge durch solche unbestimmte Urtheile und ungeordnete Wahrnehmungen von Gegenständen, die einer genauen Ausmittelung fähig sind, falsch aufgefaßt worden, führe ich das schöne Ergebniß an, welches sich in Duvillard's Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité (p. 10.) findet. Er beweist aus den Sterbelisten von Genf, Haag und Berlin, daß die Kinderblattern für Menschen über 30 Jahre alt um so weniger gefährlich werden, in je höherem Alter man sie zum erstenmal bekommt. Dieses Ergebniß war ganz gegen die gemeine Meinung; aber es ist leicht faßlich, wie sich diese entgegengesetzte Meinung bilden mußte. Ein solcher Unglücksfall mußte weit allgemeinere Aufmerksamkeit erregen, theils weil der Verstorbene schon für die Gesellschaft von Wichtigkeit war, theils nur durch das Ungewöhnliche, ihn einem Unglück erliegen zu sehen, dem in der Regel nur die Kindheit ausgesetzt ist. So wirken diese Fälle auf die Einbildungskraft der Beobachter, Gemüthsbewegungen, nicht Thatsachen bestimmen das Urtheil. Eben diese Einwirkungen werden noch weit stärker, da wo lebhafte Interessen und Leidenschaften ins Spiel kommen.«

*) l. c. p. 188.

Dem Zweck, in diesen Gebieten der Naturbeobachtung der mathematischen Induction ihr Recht zu verschaffen, im Gegensatz jener unruhigen und verfälschten Beobachtungen im gemeinen Leben, diente die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung a posteriori. Aber ihre Methoden sind nicht die einzigen hierher gehörenden, sondern sie verbinden sich mit den eben genannten Näherungsmethoden. Bei diesen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen wir uns aber sehr vorsehen, daß wir sie nicht fälschlich in einer angemaßten Unabhängigkeit von der philosophischen Induction anzuwenden versuchen.

Der Gang der Entwickelung der Wissenschaft in der Wahrscheinlichkeitsrechnung fordert diesemgemäß, daß die zwei rein mathematischen Theorieen der Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori auf gewisse Gebiete der Erfahrung angewendet werden sollen. Dabei beruht die rein mathematische Theorie auf den Grundbegriffen »gleich möglicher Fall« und »mathematische Wahrscheinlichkeit.« Da darf nun für die Anwendung nicht vergessen werden, daß dieser Begriff von den gleichmöglichen Fällen eine mathematische Abstraction bleibt, welcher der Erfahrung nie genau entspricht, ähnlich dem, wie man in der Naturlehre bei den Gesetzen des Stoßes die Voraussetzung ganz elastischer und ganz unelastischer Körper macht, um die ersten Formeln zu bestimmen. Kein Würfel, keine Münze ist absolut genau im Gleichgewicht gearbeitet; darüber verstehen wir uns leicht bei den Anwendungen auf Glückspiele, aber bei den Anwendungen der Wahrscheinlichkeit a posteriori muß man sich in Acht nehmen, hierin nicht fehl zu greifen.

Erster Abschnitt.

Reine Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erstes Kapitel.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, wenn die Theilung einer Sphäre in ihren gleichmöglichen Fälle vollständig gegeben ist, oder Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a priori.

§. 1.

Da jede berechnungsfähige Wahrscheinlichkeit eine bestimmt eingegrenzte und in ihre abgezählten gleichmöglichen Fälle getheilte Sphäre der Erkenntniß voraussetzt, so können wir zum Schema oder Symbol aller dieser Verhältnisse den Wurf eines oder mehrerer regelmäßiger Würfel nehmen, deren Seiten bezeichnet sind und bei denen es für jeden Wurf gleichmöglich bleibt, ob er die eine oder andere Seite zeige; oder auch die Ziehung von Kugeln aus einem oder mehreren Gefäßen, in denen bezeichnete Kugeln enthalten sind, und bei denen vorausgesetzt wird, daß es stets gleichmöglich bleibe, die eine oder andere Kugel bei der Ziehung zu ergreifen.

Volle Gewißheit ist hier bei dem, was in allen gleichmöglichen Fällen eintrifft, z. B. daß der gültige Wurf irgend eine bestimmte Seite des Würfels, die gültige Ziehung eine bestimmte Kugel zeige. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist hingegen da, wenn diese Fälle sich theilen in günstige, bei denen das Ereigniß eintritt, und ungünstige, bei denen es nicht eintritt, z. B. ob mit zwei Würfeln

Pasch geworfen wird, oder nicht. Daher setzten wir die volle Gewißheit gleich der vollen Einheit; die Wahrscheinlichkeit in diesem Sinne der Rechnung gleicht einem Bruch, dessen Zähler die Zahl der gleichmöglichen günstigen Fälle für ein Ereigniß, und der Nenner die Zahl aller gleichmöglichen Fälle überhaupt. Z. B. mit zwei Würfeln gibt es überhaupt 36 verschiedene gleichmögliche Würfe, unter denen 6 Pasch vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, Pasch zu werfen, ist also $6/36 = 1/6$.

Sei im Allgemeinen die Zahl aller Fälle $= a$, die Zahl der für ein Ereigniß günstigen $= m$, so ist die Wahrscheinlichkeit für dieses $= \frac{m}{a}$ und gegen dasselbe $\frac{a-m}{a}$. Oder setzen wir den Bruch $\frac{m}{a} = c$, so ist der andere $= 1 - c$.

In diesem mathematischen Sinn nennen wir daher ein Ereigniß wahrscheinlich, wenn die Wahrscheinlichkeit für dasselbe größer als $1/2$; und unwahrscheinlich, wenn die wider dasselbe größer als $1/2$.

Theilt sich die Sphäre der möglichen Fälle unter mehrere Ereignisse, die nicht zugleich stattfinden können, so wird die Summe der Wahrscheinlichkeiten für jedes derselben $= 1$ seyn. Z. B. ein Spiel Whistkarten hat 52 Blätter, in 4 Farben, von denen jede 13 Blätter zählt, unter denen 3 Bilder sind. Im ganzen Spiel sind daher 12 Bilder, und wenn ich ein Blatt ziehe, habe ich die Wahrscheinlichkeit, $12/52$ oder $3/13$ ein Bild zu ziehen. Für ein Bild in einer bestimmten Farbe hingegen werden diese 3 Fälle gegen 52 oder $3/52$. Stelle ich im ersten Fall nur die Alternative, ein Bild oder eine andere Karte, so habe ich $3/13$ für und $10/13$ gegen mich. Halte ich hingegen auf ein Bild in einer bestimmten Farbe, etwa in Coeur, so habe ich die Bilder der drei andern Farben und dann die übrigen Karten gegen mich. Also erstlich $3/52$ für die Bilder in Coeur, dann $9/52$ für die Bilder der andern Farben, endlich $40/52$ für die Blätter ohne Bild; $3/52 + 9/52 + 40/52$ ist aber $52/52 = 1$. Nach einem andern Bei-

spiel seyen in einem Gefäß m weiße, n gelbe, p rothe, q blaue, r grüne, s schwarze Kugeln, von denen eine gezogen werden soll. Hier ist die Zahl aller Kugeln $= m + n + p + q + r + s = t$, folglich $\frac{m}{t}$ die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel, $\frac{n}{t}$ für eine gelbe u. s. f., so daß die Summen aller 6 Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Farben $= \frac{m + n + p + q + r + s}{t}$ $= 1$ wird.

§. 2.

Diese Bestimmung der Wahrscheinlichkeit schlechthin für eine gemachte Voraussetzung nennen wir die absolute Wahrscheinlichkeit derselben. Es kann aber auch nur bei zwei Ereignissen derselben Sphäre gefragt werden, wie sich die eine zur andern verhalte, dann antworten die Bestimmungen der relativen Wahrscheinlichkeit. Z. B. mit zwei Würfeln können grade 7 Augen fallen durch 6 verschiedene Würfe (nämlich 6, 1; 5, 2; 4, 3; 3, 4; 2, 5; 1, 6.) Grade 4 Augen aber nur durch 3 Würfe (3, 1; 2, 2; 1, 3.) Es ist also noch einmal so leicht 7 als 4 zu treffen. Hier sagen wir, $^6/_9$ und $^3/_9$ sind die relativen Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Fälle, und diese werden erhalten, wenn man die Zahl der für jede Voraussetzung günstigen Fälle zum Zähler und ihre Summe zum Nenner des Bruches ansetzt.

In dem Beispiel der Kugeln von 6 verschiedenen Farben in einem Gefäß setzten wir m weiße und s schwarze an. Wenn wir nun hier nur die Ziehung der weißen und schwarzen Kugeln verhältnißmäßig gegen einander vergleichen, so haben wir die relative Wahrscheinlichkeit für die weißen $\frac{m}{m+s}$ und für die schwarzen $\frac{s}{m+s}$, so daß auch hier wieder die Summe der Wahrscheinlichkeit des Falles für und des Falles wider $= \frac{m+s}{m+s} = 1$ wird. Es liegt nämlich dies in der für Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzten Zufälligkeit der ein-

zelnen Fälle, daß man einige unabhängig von den übrigen in Betrachtung ziehen, aus ihnen eine eigne Sphäre bilden und die andern Fälle als diesmal nicht mitzählend betrachten kann. So wie wir hier nur die weißen und schwarzen Kugeln gelten lassen, und die Ziehungen, welche eine bunte zeigen, für nichts geltend ansetzen, oder wie z. B. in einem Spiel mit zwei Würfeln nach der Regel, daß nur die Paschwürfe gelten, die andern aber blinde Würfe bleiben.

§. 3.

Die wichtigsten Bestimmungen sind hier die einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit. Denken wir uns nämlich eine in ihre gleich möglichen Fälle getheilte Sphäre gegeben und dabei diese Fälle in verschiedene Classen geordnet, so können Zusammensetzungen durch die Verbindungen dieser Classen unter einander vorkommen.

1) Am einfachsten geschieht dies, wenn man nur mehrere solche Classen in eine vereinigt denkt, dann haben wir nur die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Theilklassen zu addiren, um die der neu gebildeten zu bestimmen.

Z. B. Wenn ich mit zwei Würfeln werfe, so habe ich überhaupt 36 verschiedene mögliche Fälle, unter diesen zeigen 6 Fälle 7 Augen und 5 Fälle 8 Augen. Frage ich nun, welche Wahrscheinlichkeit ich habe, 7 oder 8 Augen, gleich viel welches, zu werfen, so habe ich sowohl die ersten 6, als die andern 5 Fälle für mich, also zusammen 11 Fälle von 36 Fällen. Die Wahrscheinlichkeit ist $^6/_{36} + {}^5/_{36} = {}^{11}/_{36}$.

Soll aus einem vollen Spiel Karten von 52 Blättern ein Blatt gezogen werden, so habe ich einen von 52 gleichmöglichen Fällen in Frage, und für diesen die Wahrscheinlichkeit $^1/_{52}$. Diese Blätter enthalten aber 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben, 4 As u. s. w.; frage ich nun nach der Wahrscheinlichkeit, irgend ein Bild oder ein As, gleichviel welches, zu ziehen, so habe ich also 4×4 oder 16 Fälle von 52 für mich, diese Wahrscheinlichkeit ist $4 \,.\, {}^4/_{52} = {}^{16}/_{52} = {}^4/_{13}$.

2) Die wichtigsten Bestimmungen kommen aber da vor, wo die möglichen Fälle in Classen und diese Classen wieder

in Unterabtheilungen getheilt sind. Hier heißt die für das Ganze bestimmte Wahrscheinlichkeit eine zusammengesetzte, und wird erhalten, wenn man die für das Ganze bestimmte Wahrscheinlichkeit der Classe mit der nur in ihrer Classe bestimmten Wahrscheinlichkeit der Unterabtheilungen multiplicirt.

Es sei nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, aus dem vollen Spiel von 52 Karten ein Bild in Pique zu ziehen. Hier ist das Ganze der 52 Fälle in 4 gleiche Theile als Farben, jeden zu 13 Blätter, getheilt. Ich habe also die Wahrscheinlichkeit $1/4$ für mich, aus dem Ganzen irgend ein Blatt in Pique zu ziehen. Dieses Viertheil aller Fälle enthält nun 13 Blätter, unter denen 3 Bilder. Also von der Classe Pique ist die Unterabtheilung der Bilder $3/13$, folglich ist diese aus dem Ganzen $3/13$ von $1/4$, das heißt $1/4 . 3/13 = 3/52$.

Hierbei müssen wir aber genau beachten, daß die zweiten Eintheilungen genau Untereintheilungen der fraglichen Classe und nicht unbestimmte Nebeneintheilungen sind. Sagt mir z. B. jemand nur: diese 52 Karten sind von allen 4 Farben, von jeder 13 Blätter, und es finden sich 12 Bilder im Ganzen darunter, so weiß ich noch nicht, wie diese Bilder gleich oder ungleich unter die Farben vertheilt sind, und kann diese Angabe nicht zur Grundlage der hier geforderten Bestimmung zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit machen. — Sind die Untereintheilungen aber bestimmt angegeben, so ist, so viel ihrer auch seyn mögen, doch leicht dieselbe Regel anzuwenden. Das Ganze habe a Fälle; in eine Classe gehören davon b Fälle, so ist die Wahrscheinlichkeit für diese Classe $\frac{b}{a}$. Nun habe eine Unterabtheilung von diesen b Fällen c Fälle in sich, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Unterabtheilung in der Classe $\frac{c}{b}$ und im Ganzen $\frac{c}{b} . \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$. Sei nun d ein Theil der c Fälle, so ist dessen Wahrscheinlichkeit in der Unterabtheilung $\frac{d}{c}$, in

der Classe $\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{d}{b}$; im Ganzen $\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{d}{a}$, und so ferner.

Um der Sache mehr Deutlichkeit zu bringen, geben wir noch ein Beispiel, welches beide Bestimmungen dieses §. zugleich erläutert. In einem Gefäß seyen 2 weiße und 1 schwarze, in einem andern 4 weiße und 1 schwarze Kugel, man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine weiße Kugel getroffen wird, wenn man aus einem von beiden Gefäßen, unbestimmt welchem, eine Kugel zieht. Hier ist gleiche Möglichkeit da, daß das erste oder zweite Gefäß gewählt werde, jedes hat also die Wahrscheinlichkeit $1/2$ für sich. Im ersten machen nun die weißen Kugeln $2/3$, im andern $4/5$ aus. Für das Ganze haben also die weißen Kugeln aus dem ersten Gefäß $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$, aus dem andern $1/2 \cdot 4/5 = 2/5$ für sich. Dieses beides fällt aber der Aufgabe nach im Ganzen für die weißen Kugeln zusammen, und die Wahrscheinlichkeit, eine derselben zu ziehen, ist $1/3 + 2/5 = 11/15$.

Man beachte hier, wie sich die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit von der einfachen unterscheidet. Wir dürfen nämlich für unsre Aufgabe nicht sagen, in beiden Gefäßen zusammen sind 8 Kugeln, und unter diesen 6 weiße, also, wie es für einfache Wahrscheinlichkeit der Fall seyn würde, die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ziehen, $6/8 = 3/4$. Denn die 3 Kugeln des ersten Gefäßes haben grade eben so viel Wahrscheinlichkeit für sich, daß eine von ihnen getroffen werde, als die 5 des andern Gefäßes. Sobald für diese Aufgabe in verschiedenen Gefäßen ungleiche Anzahl von Kugeln oder ungleiches Verhältniß der weißen zu den schwarzen gegeben ist, so weicht hier die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit von der einfachen ab, nur wenn in jedem Gefäß gleiche Anzahl Kugeln enthalten ist, oder dasselbe Verhältniß der weißen zu den schwarzen statt findet, fallen beide Bestimmungen zusammen. Es seyen nämlich im ersten Gefäß unter a Kugeln m weiße, im andern unter b Kugeln n weiße. So haben wir die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ziehen, =

$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{b} = \frac{mb + na}{2ab}$. Die einfache wäre aber $= \frac{m+n}{a+b}$.
Diese beiden Formeln treffen zusammen 1) wenn $a = b$, denn dann wird jede $\frac{m+n}{2a}$. 2) wenn $a : b = m : n$, also $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ folglich $\frac{mb + na}{2ab} = \frac{m}{a}$, aber auch $a : a + b = m : m + n$, und daher $\frac{m+n}{a+b} = \frac{m}{a}$.

§. 4.

Wir haben gesehen, daß die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit Eintheilungen aller möglichen Fälle einer Sphäre und stuffenweise Unterordnungen in diesen Eintheilungen fordert. Diese Untereintheilungen werden wir uns häufig aus einer ersten Zahl gegebener möglicher Fälle selbst zu berechnen haben, indem sie durch Versetzungen, Combinationen oder Variationen der gegebenen möglichen Fälle bestimmt werden müssen. Z. B. es ist ein Spiel von 52 Kartenblättern gegeben, man zieht eins davon, so haben wir 52 mögliche Fälle dafür, was für ein Blatt getroffen wird. Soll nun aber 52 mal hintereinander gezogen und so das Spiel in einer Reihe aufgelegt werden und man fragt, wie viel solche Reihen möglich seyen, so antwortet die Versetzungszahl von 52 verschiedenen Elementen. Oder wir fragen nach der Zahl der möglichen Würfe mit 2, 3 oder mehrern Würfeln zugleich, so antwortet die Zahl aller Variationen von 6 Elementen in der 2ten, 3ten, oder so vielten Classe, als Würfel im Spiel sind. Hier bedarf also die Wahrscheinlichkeitsrechnung einiger Lehrsätze aus der Combinationslehre. Sie sind folgende:

1) Die Versetzungszahl für m verschiedene Elemente ist $= 1 . 2 . 3 \ldots m - 1 . m$, welches wir nach Kramp mit $(m!)$ bezeichnen wollen. Dies kann man sich leicht auf diese Weise klar machen. Man denke sich ein beliebiges aus diesen Elementen, dies kann in der Reihe der m Elemente jede beliebige Stelle, also m Stellen erhalten. Wenn ich also

einem unter m Elementen eine bestimmte Stelle anweise, es z. B. zum ersten in der Reihe mache, so ist dies einer unter m gleich möglichen Fällen. Nehme ich nun noch ein zweites dazu, so bleiben für dieses noch m — 1 Stellen offen, die von ihm besetzt werden können. Jede von diesen m — 1 Stellungen findet aber neben jeder der ersten m Stellungen des ersten Elementes möglicher Weise Platz, also finden für 2 Elemente in der Reihe von m Elementen m. (m — 1) gleich mögliche Fälle statt. Bestimme ich nun einen davon, z. B. daß das erste die erste, das andere die zweite Stelle haben soll, so ist dies ein Fall unter m. m — 1 gleichmöglichen Fällen. Für irgend ein drittes Element finden nun neben diesen zweien noch m — 2 Stellen statt. Man sieht also leicht, daß die 3 Elemente m. m — 1. m — 2. Stellungen in der Reihe haben können, und setzen wir dies fort, so gibt es für alle m Elemente 1 . 2 . 3 . . . . m — 1 . m verschiedene Stellungen, und jede einzelne unter diesen ist nur ein Fall unter so vielen gleichmöglichen.

2) Um die Versetzungszahl von m Elementen zu erhalten, unter denen eines oder mehrere wiederholt vorkommen, muß die Versetzungszahl von verschiedenen Elementen dividirt werden durch das Product der Versetzungszahlen, je so vieler verschiedener Elemente, als die einzelnen Elemente Wiederholungen enthalten. Z. B. die Versetzungszahl von $a^m b^n c^r$ ist

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots (m + n + r)}{1 . 2 . 3 \ldots m \times 1 . 2 . 3 \ldots n \times 1 . 2 . 3 \ldots r} = \frac{(m + n + r)!}{(m!) \times (n!) \times (r!)}$$

Dies wird klar, wenn man die vorige Betrachtung auf diesen Fall anwendet. Von den m Elementen seyen n von einer Art, so erhalte ich nach dem vorigen für die ersten (m — n) verschiedenen Elemente in der Reihe von m Elementen m. m — 1 . . m — n . Versetzungen, allein die n folgenden Elemente, die nur Wiederholungen desselben sind, lassen weiter keine neue Versetzungen mehr zu, und die

folgenden Zahlen n . n — 1 . . . 3 . 2 . 1 fallen also aus dem vorigen Product weg, welches eben so viel ist, als ob (m!) durch (n!) dividirt würde.

3) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bedient sich daneben auch der **Variationen mit Wiederholungen**. Hier gilt erstlich das Gesetz: die Anzahl der Complexionen der mten Variationsclasse mit Wiederholungen ist für r verschiedene Elemente $= r^m$. Auch dies ist leicht klar. Z. B. es seyen die 6 Seiten eines Würfels als 6 verschiedene Elemente gegeben. Ich variire diese mit Wiederholungen in der 2ten, 3ten . . . mten Classe, wenn ich 2, 3 . . . m Würfel neben einander stelle und nun zusehe, wie viele verschiedene Zusammenstellungen ihrer Seiten als Complexionen möglich seyen. Nun hat der erste Würfel 6 Seiten, neben jede von diesen kann jede der 6 Seiten des zweiten kommen, das gibt $36 = 6^2$ Zusammenstellungen. Neben jede von diesen können wieder die 6 Seiten des dritten Würfels kommen, das gibt $216 = 6^3$ Complexionen, und man sieht leicht, daß für m Würfel 6^m Complexionen möglich sind.

Zweitens, diese Variationen mit Wiederholungen enthalten alle Combinationen, welche die Elemente zulassen, und diese in allen ihren Versetzungen. Kommt es uns nun nicht auf die einzelnen Versetzungen der Combinationen, sondern nur auf die Combinationen selbst und die Anzahl ihrer Versetzungen an, so können wir hier alle Verhältnisse der Variationen mit Wiederholungen für r Elemente an der Form der Potenzen einer r-theiligen Größe (eines Polynomiums aus r Elementen) nachweisen, denn die mte Potenz eines solchen zeigt in der mten Classe alle Combinationen der mten Classe mit Wiederholungen aus diesen Elementen, jede Combination mit ihrer Versetzungszahl verbunden.

Dies wollen wir zuerst an den Potenzen des Binomium deutlich machen.

Wir haben $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2\,b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 51a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 \ldots + \frac{m.m-1..m-(r-1)}{1.2.3\ldots r}a^{m-r}b^r \ldots + \frac{m.m-1}{1.2}a^2b^{m-2} + mab^{m-1} + b^m.$$

Sehen wir also hier a, b nur als Elemente an, die mit Wiederholungen variirt werden, so zeigt sich uns jede Potenz als die gleich hohe Classe, so wie sie in ihre einzelnen Complexionen zerlegt ist. Es gibt hier immer in der mten Classe nur eine Complexion, die nur aus a en oder b en besteht; es gibt deren m, welche ein b mit (m — 1) a en, oder ein a mit (m — 1) b en verbinden; $\frac{m.m-1}{2}$ Complexionen aus (m — 2) a en und 2 b en, oder (m — 2) b en und 2 a en und so fort. Auch fällt ins Auge, daß die Versetzungszahlen bis in die Mitte der Reihe immer größer werden, so daß es, wenn m grade ist, von keiner Combination so viele Versetzungen gibt, als von der, welche gleich viele a und b mit einander verbindet; wenn aber m ungrade als diejenigen beiden, deren eine ein a mehr als b, und die andern ein b mehr als a hat.

§. 5.

Machen wir nun einige Anwendungen dieser Sätze auf die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten und zwar zunächst auf Beispiele von Versetzungen.

Es sei ein Gefäß mit 20 numerirten Kugeln gegeben. Aus diesen eine bestimmte, z. B. die 1 zu ziehen, hat die Wahrscheinlichkeit $1/_{20}$ für sich. Ich behalte diese und ziehe noch eine, so hat die bestimmte Nummer, z. B. die 2, die Wahrscheinlichkeit $1/_{19}$ für sich. Da aber neben die 1 auch jede der andern hätte fallen können, so ist die bestimmte Folge 1, 2, $1/_{19}$ von $1/_{20}$ aller möglichen Fälle, und hat nur die Wahrscheinlichkeit $1/_{19.20} = 1/_{380}$ für sich. Fahren wir so

fort, bis alle Kugeln gezogen sind, so erhalten wir einen Fall von allen möglichen Versetzungen der 20 verschiedenen Elemente = (20!), und jeder, z. B. die natürliche Ordnung der Zahlen, hätte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \cdot \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$ für sich.

Ferner, es seyen 16 Kugeln im Gefäß, von denen 9 numerirt, die andern 7 ohne Unterscheidung sind. Hier ist die Zahl der möglichen Fälle, wenn eine nach der andern bis zur letzten gezogen wird, $\frac{(16!)}{(7!)} = \frac{20''922789'888000}{5040} = 4151''347200$; also die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anordnung gleich der Einheit dividirt durch diese Zahl.

Endlich im Gefäß seyen 16 Kugeln, von denen 8 roth, 4 blau, 4 gelb. Hier ist die Zahl der Versetzungen, wenn eine nach der andern bis zur letzten gezogen wird $= \frac{(16!)}{(8!) \cdot (4!) \cdot (4!)} = 900900$. Seyen nun noch die Kugeln jeder Farbe für sich numerirt, so daß jede Farbe noch unter sich versetzt werden könnte, so gäbe dies für roth (8!) für blau (4!) für gelb (4!) Fälle, also im Ganzen wieder die vollen (16!) Fälle.

Wie viel Lagen der 52 Blätter eines Kartenspiels gibt es, welche im Faro, wo man die Farben nicht unterscheidet, verschiedene Bedeutung haben?

Wir haben hier 13 Elemente, von denen jedes 4mal wiederholt wird, also ist die Zahl der Versetzungen $= \frac{(52!)}{(24)^{13}}$.

§. 6.

Der andere Fall, bei dem die Berechnung zusammengesetzter Wahrscheinlichkeiten durch die Variation mit Wiederholungen geschehen muß, ist der, wo uns eine in ihre möglichen Fälle getheilte Sphäre ihre unbestimmten Erfolge wiederholt zeigt, und wir die Zahl und Art der gleichmöglichen Fälle für ein Ganzes solcher wiederholter Ereignisse bestimmen wollen. Diese Ereignisse werden immer zu vergleichen seyn der Reihenfolge von Würfen mit einem Würfel, oder auch

den zugleich fallenden Würfen mit mehreren Würfeln. Ebenfalls eine Reihenfolge von Ziehungen einer Kugel aus einem Gefäß mit Kugeln, wenn man die gezogene jedesmal wieder hineinlegt, oder den zugleich fallenden Zügen aus mehreren solchen Gefäßen.

Ein ganz einfaches Beispiel ist also ein Wurf mit zwei Würfeln, von dem wir sahen, neben jeder der 6 Seiten des einen können alle 6 des andern fallen, es gibt also 36 Fälle. Soll nun die Wahrscheinlichkeit für den Wurf beider Sechsen bestimmt werden, so ist dies einer von den 36 Fällen, sie ist $^1/_{36}$. Daneben sind theils Würfe möglich, die keine, theils andere, die nur eine 6 zeigen. Jeder Würfel zeigt in $^5/_6$ seiner Würfe die 6 nicht. Zu den $^5/_6$ des einen kommen also die $^5/_6$ des andern, und wir haben $^5/_6 \,.\, ^5/_6 = {}^{25}/_{36}$ als Wahrscheinlichkeit, keine 6 zu treffen. Endlich jeder Würfel hat $^1/_6$ seiner Würfe für die 6, und dann der andern $^5/_6$ gegen sie. Daher haben wir $^1/_6 \,.\, ^5/_6 = {}^5/_{36}$ dafür, daß nur der erste, und $^5/_6 \,.\, ^1/_6 = {}^5/_{36}$ dafür, daß nur der zweite die 6 zeigt. Da dies nun alle möglichen Fälle sind, so muß damit die Sphäre erfüllt seyn, wir haben daher $^1/_{36} + {}^5/_{36} + {}^5/_{36} + {}^{25}/_{36} = 1$, gleich der vollen Gewißheit.

Es sei von einem Wechsel von Ereignissen die Rede, wo nur zwei gleichmögliche Fälle neben einander stehen, wie die Ziehungen einer Kugel aus einem Gefäß, welches nur eine schwarze und eine weiße enthält, oder wie das Spiel: Wappen oder Schrift (croix ou pile.) Hier hat auf jeden einzelnen Zug sowohl die weiße, als die schwarze Kugel die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ für sich. Wie wahrscheinlich ist es nun, auf zwei Züge einmal weiß zu treffen. Beim ersten Zug hat weiß die Hälfte der Fälle für sich, in der andern Hälfte der Fälle theilt sich aber für den zweiten Zug wieder gleich, wir haben noch die Hälfte der Hälfte = $^1/_4$ aller Fälle für uns, und also sind $^3/_4$ aller möglichen Fälle für uns. Wie wahrscheinlich aber, zweimal weiß in zwei Zügen zu treffen? Hier haben wir beim ersten Zug die Hälfte aller Fälle für uns, allein von dieser bleibt uns nur die

Hälfte im zweiten Zug, beide zusammen geben also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Wir besprechen dies so ausführlich, weil man sich in diesen Abschätzungen so leicht irrt. Selbst in diesem einfachen Beispiel fehlte d'Alembert, indem er für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Zügen einmal weiß zu erhalten, abzählte: »trifft der erste Zug weiß, so haben wir einen Fall für uns, trifft es hier nicht, so bietet der zweite Zug seine zwei Fälle an, einen für und einen wider uns. Wir haben also von drei Fällen zwei für uns, und folglich die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.« Hier ist allerdings wahr, daß nur diese drei Fälle vorkommen können, allein sie sind nicht gleichmögliche Fälle, sondern der erste hat die Hälfte aller gleichmöglichen Fälle überhaupt, jeder der andern aber nur $\frac{1}{4}$ derselben für sich. Für zwei Züge finden überhaupt die 4 Fälle aa, ab, ba, bb statt, von denen 3 also $\frac{3}{4}$ a einmal enthalten.

Ein anderes einfaches Beispiel der Warnung ist das Spiel Paar oder Unpaar, welches man leicht, wie Wappen oder Schrift, für ein ganz gleiches Spiel ansieht, und doch ist es dieses nicht. Spiele ich nämlich mit einer Marke a, so habe ich einmal unpaar und kein paar; mit zwei Marken a, b, zweimal unpaar a, b und einmal paar ab; mit drei Marken abc, viermal unpaar a, b, c, abc und dreimal paar ab, ac, bc. Seyen nun für m Marken die Anzahl unpaar $= J_m$, die Anzahl paar P_m, die Anzahl aller Combinationen paar und unpaar A_m, und ich lege noch eine Marke zu, so behalte ich alle vorigen Combinationen, und jede paar gibt eine neue unpaar, wenn ich die neue zusetze, jede unpaar gibt eine neue paar, und die neue Marke gibt noch einmal unpaar hinzu.

Also ist allgemein $P_{m+1} = P_m + J_m = A_m$; $J_{m+1} = J_m + P_m + 1 = A_m + 1$. Folglich immer $P_m = J_m - 1$. $A_{m+1} = 2A_m + 1$.

Setze ich nun $m = o$, so ist $A_1 = 1$, dann $A_2 = 2 + 1$;

$A_3 = 6 + 1$. Oder setzen wir $A_1 = 2 - 1$, so ist $A_2 = 4 - 2 + 1 = 4 - 1$; $A_3 = 8 - 2 + 1 = 8 - 1$ und so fort $A_m = 2^m - 1$. Davon aber $P_m = 2^{m-1} - 1$, $J_m = 2^{m-1}$.

§. 7.

Nehmen wir allgemein zwei entgegengesetzte Ereignisse, so daß entweder A oder B eintreffen muß, und bei denen die gleichmöglichen Fälle für und wider bekannt sind. Wir können dies vorstellen durch Ziehungen aus einem Gefäß, in welchem p weiße und q schwarze Kugeln befindlich sind; die Ziehung einer weißen heiße A, die entgegengesetzte einer schwarzen heiße B. Für eine Ziehung gibt es also $p + q$ gleichmögliche Fälle, von denen p für A, q für B. Die Wahrscheinlichkeit für A ist also $\frac{p}{p+q}$, dies wollen wir $= c$ setzen; die für B ist $= \frac{q}{p+q} = 1 - c$, welches wir f nennen wollen.

Zwei Ziehungen zusammengenommen werden alle Variationen mit Wiederholungen für $(p + q)$ Elemente und in der zweiten Classe enthalten. Ihre Anzahl ist also (nach §. 5. 3,) $(p + q)^2$ und der Unterschied der Versetzungen, daß p^2 Fälle für AA, pq Fälle für AB, pq für BA und q^2 für BB vorkommen, so daß $\frac{p^2}{(p+q)^2}$, $\frac{pq}{(p+q)^2}$, $\frac{pq}{(p+q)^2}$ und $\frac{p^2}{(p+q)^2}$ nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versetzungen sind. Rechnen wir aber bloß die Combinationen, so daß AB und BA (einmal weiß und einmal schwarz) gleichbedeutend sind, so haben wir für AB $\frac{2pq}{(p+q)^2}$ zur Wahrscheinlichkeit.

Nach derselben Regel lassen 3 Ziehungen $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ Fälle zu, so daß für AAA die Wahrscheinlichkeit $\frac{p^3}{(p+q)^3}$, für AAB $\frac{3p^2q}{(p+q)^3}$, für ABB $\frac{3pq^2}{(p+q)^3}$ und für BBB $\frac{q^3}{(p+q)^3}$ gilt.

Im Allgemeinen für m Ziehungen finden $(p+q)^m$ Fälle statt, und die Entwickelung $p^m + m p^{m-1} q + \frac{m.m-1}{1.2} p^{m-2} q^2 ..$ $\frac{m.(m-1)..(m-r+1)}{1.2...r} p^{m-r} q^r ... q^m$ zeigt uns, wie viele Fälle für jede einzelne Combination stattfinden, indem wir die einzelnen Glieder der Reihe vergleichen und den Exponenten von p die Anzahl der A, den von q die Anzahl der B bestimmen lassen. Die Combination der mten Classe aus (m — r) mal A mit r mal B hat also $\frac{m.m-1..(m-r+1)}{1.2.3...r} p^{m-r} q^r$ Fälle für sich, und da der Coefficient die Zahl der möglichen Versetzungen derselben anzeigt, so hat jede bestimmte Versetzung $p^{m-r} q^r$ mögliche Fälle für sich. Z. B. für $m p^{m-1} q$ lassen die p weißen Kugeln, in der Classe (m — 1), p^{m-1} Variationen mit Wiederholungen zu, dazu kommt jedesmal eine schwarze Kugel, und da diese jede der m Stellen einnehmen kann, so gibt dies m Versetzungen jeder Combination (m — 1) A mit 1 B verbunden; und also $m p^{m-1}$ mögliche Fälle dieser Combination für jede einzelne schwarze Kugel, da deren aber q vorhanden sind, endlich $m p^{m-1} q$ Fälle dieser Combination und $p^{m-1} q$ Fälle jeder von ihren Versetzungen.

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Combinationen von m Erfolgen bestimmen sich also
für m mal A, (m—1) A 1 B, (m—r) A r B

$$\frac{p^m}{(p+q)^m},\quad m\frac{p^{m-1} q}{(p+q)^m},\quad \frac{m.m-1..(m-r+1)}{1.2...r}\frac{p^{m-r} q^r}{(p+q)^m}$$

oder

$$c^m,\quad m c^{m-1} f,\quad \frac{m.m+1..(m-r+1)}{1.2...r} c^{m-r} f^r.$$

§. 8.

Aus diesem läßt sich leicht bestimmen, wie wahrscheinlich es sei, in m Ziehungen A nicht weniger oder mehr als eine bestimmte Anzahl mal zu erhalten. A ist nämlich in allen

Combinationen (m — r) mal und mehr enthalten, welche in der letzten Reihe von c^m an bis zu dem Gliede fortgehen, in welchem m — r der Exponent von c ist. Alle diese Glieder zusammen addirt geben also die Wahrscheinlichkeit A in m Zügen nicht weniger als m — r mal zu erhalten. Z. B. A wenigstens m — 1 mal zu erhalten ist die Wahrscheinlichkeit $c^m + m c^{m-1} f$; für A wenigstens m — 2 mal ist sie $c^m + m c^{m-1} f + \frac{m.m-1}{1.2} c^{m-2} f^2$, u. s. f.

Da die Summe der ganzen Reihe $= \frac{(p+q)^m}{(p+q)^m} = 1$, so ist, wenn wir einen Theil Z von der Reihe wegnehmen, der Rest derselben = 1 — Z. Wenn daher hier in m — r das r größer als $\frac{1}{2}$ m wird, so ist der nicht in Rechnung zu nehmende Theil der Reihe der kürzere, wir werden dann also besser thun, diesen zuerst zu berechnen, und ihn dann von 1 abzuziehen, um die verlangte Summe zu erhalten. Wie wahrscheinlich ist es z. B., in 4 Würfen mit einem Würfel die 6 wenigstens einmal zu treffen? Hier müßten wir die drei Glieder $c^4 + 4 c^3 f + 6 c^2 f^2 + 4 c f^3$ summiren, bequemer setzen wir sie gleich $1 - f^4$ und berechnen dies. Da f hier $\frac{5}{6}$, so ist $1 - f^4 = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$, welches mehr als $\frac{1}{2}$ beträgt, es ist also überwiegend wahrscheinlich, in 4 Würfen die 6 einmal zu treffen. Aber wie wahrscheinlich, daß wir sie in diesen Würfen 2mal erhalten? Dafür brauchen wir für $c = \frac{1}{6}$ und $f = \frac{5}{6}$ die Summen der Glieder $c^4 + 4\ c^3\ f + 6\ c^2\ f^2 = \frac{1}{6^4} + 4\ .\ \frac{1.5}{6^4} + 6\ .\ \frac{1.25}{6^4} = \frac{1+20+150}{1296} = \frac{171}{1296}$, welches zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ fällt.

2) Es ist begreiflich, daß die einfache Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beständig zunehmen wird, bei je mehr Wiederho-

lungen wir es nur einmal erwarten. So zeigte unser Beispiel, daß die Wahrscheinlichkeit, einmal die Sechs zu treffen, welche für einen Wurf $1/6$ ist, bei 4 Würfen schon über $1/2$ gestiegen war. Wir wollen dem Verlauf dieser Vermehrungen in einigen einfachen Beispielen nachgehen.

Haben wir nur zwei gleichmögliche Fälle einen für und einen wider A, d. h. spielen wir nur mit zwei Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, einmal A zu treffen, $1/2$ für, $1/2$ wider. Beim zweiten Zug wird dies $1/2$ wider A wieder in $1/2$ für und $1/2$ wider getheilt, wir gewinnen noch $1/4$. Beim dritten Zug von dem fehlenden $1/4$ wieder die Hälfte u. s. f. Man sieht leicht, daß die Reihe $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ . . . diese steigenden Wahrscheinlichkeiten mißt, wenn man für m Ziehungen die m ersten Glieder derselben addirt. So sind diese Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach $1/2$, $3/4$, $7/8$, $15/16$ . . $\frac{2^n - 1}{2^n}$, sie nähern sich der Einheit ohne Ende, ohne sie völlig zu erreichen.

Es sei eine weiße und 3 schwarze Kugeln im Gefäß. Wie wahrscheinlich ist es, in m Ziehungen eine weiße zu erhalten. Bei der ersten Ziehung ist diese Wahrscheinlichkeit $1/4$; von den $3/4$ gegen gewinnen wir beim zweiten Zug wieder $1/4$, also $3/4 \cdot 1/4$; und $3/4 \cdot 3/4$ bleiben gegen uns; davon gibt der dritte Zug uns wieder $1/4$, also $3/4 \cdot 3/4 \cdot 1/4$ u. s. f. Wir sehen, daß die Wahrscheinlichkeiten jedes Zuges für sich durch eine geometrische Reihe dargestellt werden, deren erstes Glied die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $1/4$, und deren Exponent die einfache Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht eintreffen werde, $3/4$. Für m Ziehungen haben wir also m Glieder dieser Reihe zu summiren; dies gibt $1/4$, $7/16$, $37/64$, $175/256$ u. s. w.

Nun seyen p weiße mit q schwarzen Kugeln im Gefäß, man verlangt die Wahrscheinlichkeit, in m Ziehungen wenigstens eine weiße zu erhalten? Hier haben wir für die erste Ziehung die Wahrscheinlichkeit c für und f wider uns. Beim zweiten Zug gewinnen wir c von diesem f der Fälle, erhal-

ten die Wahrscheinlichkeit $c\,f$ für und $f\,f$ wider uns. Von diesem f^2 gibt uns der dritte Zug c, wir erhalten also $c\,f^2$ für und f^3 wider uns. Die geometrische Progression ist hier c, cf, cf^2, cf^3 u. s. f., deren m erste Glieder zu summiren sind, um die Wahrscheinlichkeit, in m Ziehungen wenigstens einmal weiß zu erhalten, zu bestimmen. Diese Wahrscheinlichkeit ist also $= \frac{c\,(f^m - 1)}{f - 1} = 1 - f^m = 1 - \frac{q^m}{(p+q)^m}$, wie dies auch daraus erhellt, daß wir sie durch Summirung der Reihe $c^m + m\,c^{m-1}\,f \ldots\ldots$ nur ohne deren letztes Glied f^m erhalten sollten.

3) Demgemäß können wir auch umgekehrt die Aufgabe lösen: in wieviel Ziehungen erreicht die Wahrscheinlichkeit jedesmal A oder auch nur einmal A zu treffen, einen gewissen Werth $= g$?

Die Wahrscheinlichkeit, jedesmal A zu treffen, ist für m Ziehungen $= c^m$, also $c^m = g$ und $m = \frac{\log.\,g}{\log.\,c}$. Hier ist die Wahrscheinlichkeit immer im Abnehmen, wir müssen also für g immer kleinere Werthe als $c = \frac{p}{p+q}$ ansetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, wenigstens einmal in m Ziehungen A zu treffen, ist $1 - f^m$, also $1 - f^m = g$; $m = \frac{(\log.\,1 - g)}{\log.\,f.}$ oder wenn $1 - g = \frac{s}{t}$ so ist $m = \frac{\log.\,t - \log.\,s}{\log.\,(p+q) - \log\,q}$.

Z. B. nach wieviel Würfen ist es eben so wahrscheinlich, mit zwei Würfeln beide Sechsen zu treffen, als nicht zu treffen? Hier ist $\frac{s}{t} = \frac{1}{2}$; $f = \frac{35}{36}$, $m = \frac{\log.\,2}{\log.\,36. - \log.\,35} = 24{,}6.$ Bei 24 Würfen überwiegt noch die Wahrscheinlichkeit wider, bei 25 Würfen schon die für uns.

Wollten wir diese Frage auch auf andere Combinationen

von A und B ausdehnen, so bekämen wir mehrere Glieder der Reihe $c^m + m c^{m-1} f \ldots = g$ zu setzen, d. h. Gleichungen von schwieriger Behandlung, um daraus m zu bestimmen.

§. 9.

Gelegentlich werden wir auch von gegebenen zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten auf die einfachen zurückschließen können, durch die sie bestimmt wurden. Wenn z. B. ein Spieler bei einem Spiel auf drei Würfe seinem Gegner zwei erläßt, um gleiche Wahrscheinlichkeit zwischen ihnen herzustellen, so muß er dreimal hinter einander gewinnen, denn der Gegner entscheidet schon mit einem glücklichen Wurf. Wie groß ist da die Wahrscheinlichkeit c für einen Wurf des ersten? Wir haben hier $c^3 = 1/2$ also $c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, das macht 0,7937, nicht ganz $4/5$.

Hätte er nur einen Wurf nachgelassen, so müßte er entweder dreimal hinter einander, oder wenigstens auf vier Würfe dreimal gewinnen, weil sonst dem Gegner zwei zufielen. Hier ist also $c^4 + 4\,c^3\,f = 1/2$, oder $4\,c^3 - 3\,c^4 = 1/2$. Dies gibt ungefähr 0,6143.

§. 10.

Nun wollen wir die relativen Wahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Combinationen betrachten, so wie sie durch die einzelnen Glieder in der Entwicklung von $(p + q)^m$ bestimmt werden.

Setzen wir zuerst p = q, so haben wir für A und B gleiche Wahrscheinlichkeit, es wird $c = f = 1/2$ und die Reihe $c^m + m c^{m-1} f$ u. s. w. zeigt in ihren einzelnen Gliedern die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Combinationen nur durch ihre mit 2^m dividirten Coefficienten an. 2 mal A und 2 mal B hat die Wahrscheinlichkeit $1/4$, 1 A 1 B $1/2$ für sich. 3 mal A und 3 mal B haben $1/8$, 2 A 1 B und 1 A 2 B $3/8$; 4 mal A und 4 B $1/16$, 3 A 1 B und 1 A 3 B $4/16$, 2 A 2 B $6/16$ für sich u. s. w.

Da die mittelsten Glieder die größten Coefficienten haben, so sind ihre Combinationen relativ jedesmal die wahrscheinlichsten, absolut nimmt mit dem wachsenden m ihre Wahrscheinlichkeit ab, aber die relative gegen jede andere Combination ist im Steigen. Z. B. 1 A 1 B hat $\frac{1}{2}$ für sich

2 A 1 B
und 1 A 2 B . . $\frac{3}{8}$
2 A 2 B . . $\frac{3}{8}$
3 A 2 B
und 2 A 3 B . . $\frac{5}{16}$
3 A 3 B . . $\frac{5}{16}$ u. s. w.

Relativ aber haben wir 1 A 1 B mit $\frac{1}{2}$, 2 mal A mit $\frac{1}{4}$ zu vergleichen; dies gibt für das erstere $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$. Hingegen 2 A 1 B mit $\frac{3}{8}$ gegen $\frac{1}{8}$ für 3 mal A, gibt relativ für ersteres $\frac{3}{4}$; und 2 A 2 B mit $\frac{3}{8}$ gegen 4 mal A mit $\frac{1}{16}$ gibt $\frac{6}{7}$ u. s. f.

Setzen wir diese Rechnung fort, so findet sich für m = 100, daß 50 A 50 B nur eine absolute Wahrscheinlichkeit 0,0795892 für sich haben. Allein relativ gegen $\frac{1}{2^{100}}$, als die absolute Wahrscheinlichkeit 100 mal A zu erhalten, ist diese Wahrscheinlichkeit doch kaum von der Einheit zu unterscheiden, da sie $\frac{0{,}0796}{\frac{1}{2^{100}}+0{,}0796}$ beträgt und 2^{100} eine Zahl ist, welche durch 30 Ziffern geschrieben werden muß.

Wollen wir diese Sätze im Allgemeinen einsehen, so müssen wir uns aus der Analysis der Gesetze für die Bildung der Coefficienten in den Potenzen des Binomium erinnern. Wir bezeichnen mit ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ den in der Entwicklung von $(p+q)^{m}$ zu q^{r} gehörenden Coefficienten. Dann haben wir, wenn wir bei derselben Potenz von (p + q) Schritt vor Schritt einen Coefficienten aus dem andern bilden: ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{m}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{m-r+1}{r}$;

gehen wir aber von Potenz zu Potenz so fort, daß wir m jedesmal um 1 wachsen lassen, so ist: ${}^{m}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{m-1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{m-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$.

Für ein grades m ist nun der größte mittelste Coefficient $= \frac{m \,.\, m-1 \,...\, (\frac{1}{2}m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, \frac{1}{2}m}$ und die absolute Wahrscheinlichkeit seiner Combination folglich $\frac{m \,.\, m-1 \,...\, (\frac{1}{2}m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, \frac{1}{2}m \,.\, 2^m}$ $= {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{\frac{1}{2}m.+1}{\frac{1}{2}m \,.\, 2^m} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{m+2}{m \,.\, 2^m}$. Für die nächstvorhergehende ungrade Potenz ist der größte Coefficient grade die Hälfte von diesem, und seine Wahrscheinlichkeit also dieselbe (nämlich ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2^{m-1}} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} \,.\, \frac{1}{2^m}$).

Für die nächstfolgende ungrade Potenz müssen wir aber ihren größten Coefficienten ${}^{m+1}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} + {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}}$ bestimmen. Aber ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{\frac{1}{2}m+1}{\frac{1}{2}m}$. Also ist ${}^{m+1}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}}$ $(1 + \frac{\frac{1}{2}m+1}{\frac{1}{2}m}) = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{2(m+1)}{m}$. Die Wahrscheinlichkeit seiner Combination ist daher ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{2(m+1)}{m \,.\, 2^{m+1}} =$ ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} + \frac{m+1}{m \,.\, 2^m}$.

Hier verhalten sich also die Wahrscheinlichkeiten der mittleren Combinationen zweier auf einander folgender Potenzen wie ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{m+2}{m \,.\, 2^m} : {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{m+1}{m \,.\, 2^m} = \frac{m+2}{m} : \frac{m+1}{m}$, das heißt, sie nehmen ins Unendliche immer ab, aber je größer m wird, um so langsamer.

Ferner in derselben Potenz ist der größte Coefficient ${}^{m}\overset{\frac{1}{2}m}{\mathfrak{B}} = {}^{m}\overset{\frac{1}{2}m-1}{\mathfrak{B}} \times \frac{m+2}{m}$; seine relative Wahrscheinlichkeit also um $\frac{m+2}{m}$ größer, als die des nächst vorhergehenden; sie

bleibt dieser immer überlegen, aber immer um so weniger, je größer m wird. Dagegen aber rücken die Wahrscheinlichkeiten der entferntesten Glieder ins Unermeßliche immer weiter auseinander. Die Wahrscheinlichkeit für m mal A oder m mal B ist $\frac{1}{2^m}$, die für $\frac{1}{2}$ m A $\frac{1}{2}$ m B hingegen $\frac{m \,.\, m-1 \,.\,.\,.\, (\frac{1}{2}m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, \frac{1}{2}m \,.\, 2^m}$, sie verhalten sich wie $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{1}{2} m : m \,.\, m-1 \ldots (\frac{1}{2} m + 1)$, welches letztere das erste mit steigenden Werthen von m immer mehr überbietet.

§. 11.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Fälle, in denen für A und B nicht gleich viel mögliche Fälle vorhanden sind, und nehmen wir an, daß $p > q$, für A also mehr Fälle sind, als für B. Hier werden in der Entwicklung von $(p + q)^m$ die Glieder mit gleichen Coefficienten auf der Seite von p größer, die auf der Seite von q kleiner, das größte Glied, dessen Combination die größte Wahrscheinlichkeit gegen jede andere einzeln gerechnet hat, muß nun nicht mehr in die Mitte fallen, sondern wir werden es nach der successiven Bildung der Glieder auseinander aufzusuchen haben.

In der Reihe $p^m + {}^m\mathfrak{B}^1 p^{m-1} q + {}^m\mathfrak{B}^2 p^{m-2} q^2 \ldots + {}^m\mathfrak{B}^1 p\, q^{m-1} + q^m$ wird jedes folgende rte Glied aus dem nächstvorhergehenden erhalten, indem dieses mit $\frac{m-r+1}{r} \,.\, \frac{q}{p}$ multiplicirt wird. Die einzelnen Glieder wachsen also immer so lange diese Größe > 1, und nehmen ab, wenn sie < 1 wird. Setzen wir sie also $= 1$, so finden wir die Grenze, bei der die Glieder ihren größten Werth erlangt haben und dann abzunehmen anfangen. Wir setzen also $\frac{(m-r+1)\,q}{r\,p} = 1$; $r\,p = m\,q - r\,q + q$; $r = \frac{q\,(m+1)}{p+q}$. Das heißt, die diesem gleiche oder nächst kleinere ganze Zahl ist also der Exponent von q im größten Gliede. Da nun dieser Exponent mit

dem von p zusammengenommen die Summe m gibt, so ist der zugehörige Exponent von p gleich $m - \frac{q(m+1)}{p+q} = \frac{pm + qm - qm - q}{p+q} = \frac{mp - q}{p+q}$. Ist also $\frac{qm+q}{p+q}$ eine ganze Zahl, so haben wir darin einen Werth für r, bei welchem sich zwei gleiche Glieder einander folgen, die in der Reihe die größten sind. Ist aber $\frac{qm+q}{p+q}$ eine gebrochene Zahl, so muß der Werth von r für das größte Glied der Reihe zwischen $\frac{qm+q}{p+q}$ und $\frac{qm+q}{p+q} - 1 = \frac{qm-p}{p+q}$ liegen. Dann werden die Grenzen für (m — r) $\frac{mp-q}{p+q}$ und $\frac{mp-q}{p+q} + 1 = \frac{pm+p}{p+q}$. Der kleinste Werth für r und der größte für (m — r) verhalten sich also wie $qm+q : pm+p = q : p$. Das Verhältniß r : (m — r) kann also hier nie um eine volle Einheit von dem q : p abweichen. Das heißt, das größte Glied der Entwicklung ist immer dasjenige, in dessen Combination die Anzahl der A zu denen der B so nahe als möglich im Verhältniß p : p steht, und genau sobald m eine Zahl ist, die sich in ganzen Zahlen nach diesem Verhältniß eintheilen läßt.

Nehmen wir z. B. p = 3, q = 2; m nach einander = 5 und = 10. In der Entwicklung von $(p+q)^5$ ist das größte Glied $10\, p^3 q^2 = 1080$. Dies gibt $\frac{1080}{5^5} = \frac{1080}{3125}$ ungefähr $\frac{1}{3}$ als Wahrscheinlichkeit, in fünf Zügen 3 mal A und 2 mal B zu erhalten.

Für m = 10 ist das größte Glied nach obigem $\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$ $p^6 q^4 = 210 \cdot 3^6 \cdot 2^4 = 2449440$, und die Wahrscheinlich-

keit $\frac{210 \,.\, 3^6 \,.\, 2^4}{5^{10}} = \frac{2449440}{9765625}$, ungefähr $^2/_9$, in zehn Zügen 6 mal A und 4 mal B zu erhalten.

Setzen wir im Allgemeinen $m = n\,(p + q)$, so erhalten wir also als größtes Glied der Entwicklung dasjenige, welches $p^{np}\, q^{nq}$ enthält.

2) Alsdann wird $\frac{m - r + 1}{r} \,.\, \frac{q}{p} = \frac{np + 1}{nq} \,.\, \frac{q}{p}$

$= \frac{np + 1}{np}$, als Quotient der Division des größten Gliedes durch das nächstvorhergehende. Setzen wir für den Quotienten des größten Gliedes durch das nächstfolgende $r + 1$ für r, so erhalten wir $\frac{nq}{nq + 1}$. Zwei Werthe, die je größer n wird, immer um so näher an 1 kommen. Man sieht also, wie sich die größten Glieder mit steigenden Werthen von m immer in gleicheren Verhältnissen um das größte gruppiren.

Vergleichen wir das größte Glied M mit zwei andern, von denen das eine um n Stellen aufwärts, das andere um n Stellen abwärts davon entfernt ist, das heißt die Glieder $\overset{nq-n}{\mathfrak{B}}\, p^{np+n}\, q^{nq-n}$; $\overset{nq}{\mathfrak{B}}\, p^{np} q^{nq}$; $\overset{nq+n}{\mathfrak{B}}\, p^{np-n}\, q^{nq+n}$; welche wir L, M, L′ nennen wollen, unter einander, so ergibt sich:

$$\frac{M}{L} = \frac{(np + n)\,(np + n - 1) \,.\,.\,.\,.\,.\, (np + 1)}{(nq - n + 1)\,(nq - n + 2) \,.\,.\,.\, nq} \,.\, \frac{q^n}{p^n}$$

$$\frac{M}{L'} = \frac{(nq + n)\,(nq + n - 1) \,.\,.\,.\,.\, (nq + 1)}{(np - n + 1)\,(np - n + 2) \,.\,.\,.\, np} \,.\, \frac{p^n}{q^n}$$

welche beide gleiche Form haben, nur daß p und q ihre Stellen umgetauscht haben.

Dies vorausgesetzt, wollen wir zeigen, daß sich das Verhältniß $\frac{M}{L}$ durch immer größere Werthe von n so groß machen lasse, als man will. Wir vertheilen darum die Potenzen q^n und p^n in ihre einzelnen Factoren, und vereinigen diese mit

den einzelnen Theilen des Coefficienten, dann wird

$$\frac{M'}{L} = \frac{npq + nq}{npq - np + p} \times \frac{npq + nq - q}{npq - np + 2p} \ldots \times \frac{npq + q}{npq}.$$

Jeder dieser Factoren ist >1; ihre Anzahl $= n$ kann so groß werden, als man will, dann muß ihr Product immer größer werden.

Dividirt man jedes Glied des ersten und letzten Theils mit n, so erhält man

$\frac{pq + p}{pq - p + \frac{p}{n}}$ und $\frac{pq + \frac{q}{n}}{pq}$ zwischen welchen beiden immer $\frac{pq + q}{pq} = \frac{p + 1}{p}$ enthalten ist.

Man kann aber immer eine Zahl t bestimmen so groß, daß $\left(\frac{p + 1}{p}\right)^r$ jeder gegebenen Zahl t gleich oder noch größer als sie werde. Denn wenn $\left(\frac{p + 1}{p}\right)^r = t$, so ist r (log. $[p + 1]$ — log. $p) =$ log. t . $r = \frac{\log. t}{\log. (p + 1) - \log. p}$.

Da dies keine ganze Zahl wird, so braucht man nur die nächst größere zu nehmen. Nun läßt sich n so bestimmen, daß der rte Factor im Werth von $\frac{M}{L} = \frac{p + 1}{p}$ wird. Man setze nämlich

$$\frac{npq + nq - (r - 1) q}{npq - np + rp} = \frac{p + 1}{p}$$

und bestimmen daraus n. Wir erhalten dafür

$$\frac{npq + nq - (r - 1) q}{nq - n + r} = p + 1.$$

und $n = r + \frac{rq - q}{p + 1}$.

Durch diesen Werth von n werden die $(r - 1)$ Factoren links aus dem Werth von $\frac{M}{L}$ genommen größer, als $\frac{p + 1}{p}$,

da erst der rte Factor diesem gleich ist. Daher wird das Product dieser r Factoren größer als $\left(\frac{p+1}{p}\right)^r$, das heißt als t; und da auch jeder folgende Factor > 1, noch viel mehr als das ganze $\frac{M}{L}$.

So wird also das Verhältniß $\frac{M}{L}$ größer, als jede gegebene Zahl. Eben dies gilt für $\frac{M}{L'}$, wo wir in den Formeln nur p und q umzutauschen haben. Hier ist also

$$r = \frac{\log. t}{\log. (q+1) - \log. q}, \text{ und } n = r + \frac{rp - p}{q+1}.$$

Dies wird fast immer andere Werthe für n geben, als die vorigen, dann aber wird der größere davon sowohl $\frac{M}{L}$ als $\frac{M}{L'} > t$ werden lassen.

Die relative Wahrscheinlichkeit des größten Gliedes in der Entwicklung von $(p+q)^m$ übersteigt also mit höheren Werthen von m jede Grenze, aber die absolute Wahrscheinlichkeit für diese Combination nimmt doch daneben immer fort ab und zwar mit steigenden Werthen von n unter jede gegebene Grenze. Die Nachweisung dafür fordert größere Kunstgriffe der Analysis, auf die wir §. 13. hinweisen wollen. Hier nehmen wir den Satz als zugegeben an.

Daraus folgt denn fürs erste, daß die Wahrscheinlichkeit, nicht um mehr oder weniger als eine um eine bestimmte beständige Zahl r größere oder kleinere Anzahl A als np zu erhalten, auch beständig und über jede Grenze hinaus abnimmt; denn diese Wahrscheinlichkeit ist aus den Gliedern von $p^{np+r} q^{nq-r}$ bis $p^{np-r} q^{nq+r}$ dies mit eingeschlossen zusammengesetzt, deren Zahl beständig nämlich $2r+1$ ist, und deren jedes auf eine verschwindende Wahrscheinlichkeit heruntergebracht werden kann.

§. 12.

Der Zweck aller Rechnungen der vorigen §. ist nun, zu zeigen, daß, wenn wir wiederholt unter denselben Bedingungen den Wechsel der Begebenheiten beobachten, bei hinlänglich vielen Wiederholungen sich A und B im Durchschnitt des Ganzen im Verhältniß ihrer einfachen Wahrscheinlichkeit zeigen werden, also nach dem Verhältniß p : q. Für die Ausführung dieses Beweises sind nach den zuerst von Jakob Bernoulli gegebenen Nachweisungen folgendes die Hauptsätze.

1) Wenn man das einfache Verhältniß der gleichmöglichen Fälle für A oder für B, $\frac{p}{p+q}$ oder $\frac{q}{p+q}$ zwischen zwei Grenzen einschließt, so wird es mit der steigenden Anzahl der Ereignisse immer wahrscheinlicher, daß sich die Anzahl der A oder B nicht über diese Grenzen entfernen werde.

Sei fürs erste p = q, oder die Wahrscheinlichkeit für A und die für B, $c = f = \frac{1}{2}$. Wir nehmen $\frac{1}{10}$ mehr und $\frac{1}{10}$ weniger $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$ als Grenzen. Fragen wir nun zuerst für 5 Züge, wie wahrscheinlich es sei nicht mehr als 3 und nicht weniger als 2 A zu erhalten, so müssen wir zur Antwort aus der Entwicklung von $(c + f)^5$ die Glieder $10\,c^3 f^2 + 10\,c^2 f^3$ nehmen.

Dies gibt für $c = f = \frac{1}{2}$, $\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

Ferner für 10 Züge wäre die Frage nach nicht mehr als 6, nicht weniger als 4 A Dafür ist die Wahrscheinlichkeit aus der Entwicklung von $(c + f)^{10} = 210\,c^6 f^4 + 252\,c^5 f^5 + 210\,c^4 f^6 = \frac{672}{1024}$, welches $> \frac{5}{8}$.

Diese Vermehrung der Wahrscheinlichkeit ist noch gering, steigen wir aber bedeutender mit der Anzahl der Ziehungen, so erhalten wir auch hier größere Werthe. Für 100 Züge müssen wir z. B. alle Glieder von $(c + f)^{100}$ von $c^{60} f^{40}$ bis $c^{40} f^{60}$ nehmen. Hier ist ${}^{100}\mathfrak{B}^{50} = \frac{100 \,.\, 99 \ldots 51}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 50}$;

${}^{100}\overset{51}{\mathfrak{B}} = {}^{100}\overset{50}{\mathfrak{B}} \cdot {}^{50}/_{51}$, ${}^{100}\overset{52}{\mathfrak{B}} = {}^{100}\overset{51}{\mathfrak{B}}\ {}^{49}/_{52}$ .... ${}^{100}\overset{60}{\mathfrak{B}} =$ ${}^{100}\overset{59}{\mathfrak{B}}\ {}^{41}/_{60}$. Berechnen wir die Summe aller dieser, so daß man zu $\overset{50}{\mathfrak{B}}$ 2 mal die Summe von $\overset{49}{\mathfrak{B}}$ bis $\overset{60}{\mathfrak{B}}$ hinzuthut (weil die Coefficienten auf beiden Seiten von $\overset{50}{\mathfrak{B}}$ gleichmäßig abnehmen), und das Ganze durch $c^{60}\, f^{40} = c^{40}\, f^{60}\, \frac{1}{2^{100}}$ dividirt, so finden wir ungefähr ${}^{96}/_{100}$ als die fragliche Wahrscheinlichkeit, welche der Wahrheit schon sehr nahe gerückt ist.

2) Um diese Wahrheit im Allgemeinen zu behandeln, sprechen wir den Satz noch bestimmter aus: *man kann immer eine so große Anzahl von Ziehungen angeben, daß die Wahrscheinlichkeit, das Verhältniß der Ereignisse A und B werde sich in diesen von dem Verhältniß ihrer einfachen Wahrscheinlichkeit p:q nicht über zwei noch so eng gesetzte Grenzen entfernen, so groß wird, als man will.*

Sei wie oben $\frac{p}{p+q}$ die einfache Wahrscheinlichkeit für A, m die Zahl der Ziehungen, so würde $\frac{m\,p}{p+q}$ die Anzahl der A genau nach dem Verhältniß der einfachen Wahrscheinlichkeit seyn. Wir setzen anstatt dessen, daß das wirkliche Verhältniß nur zwischen den Grenzen $\frac{p+1}{p+q}$ und $\frac{p-1}{p+q}$ bleiben solle, so daß wir nicht mehr als $\frac{p+1}{p+q}$ m und nicht weniger als $\frac{p-1}{p+q}$ m mal A erhalten. Um ganze Zahlen zu behalten, setzen wir $m = n\,(p+q)$ und haben also $np + n$ und $np - n$ als die verlangten Grenzen.

Um dafür die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen wir in der Entwicklung von $(p+q)^{n\,(p+q)}$ von dem größten

Glied ${}^{m}\mathfrak{B}^{nq}\, p^{np}\, q^{nq}$ auf beiden Seiten weiter gehen, links bis ${}^{m}\mathfrak{B}^{nq-n}\, p^{np+n}\, q^{nq-n}$ und rechts bis ${}^{m}\mathfrak{B}^{nq+n}\, p^{np-n}\, q^{nq+n}$ und alle diese Glieder addiren.

Dieses festgesetzt, wollen wir die dem größten Glied M nach der Linken zunächst folgenden Glieder F, G, H u. s. w., die auf das Glied L (§. 10.) noch weiter links folgenden Glieder P, Q, R u. s. w. nennen. Alsdann wird $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$, $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ u. s. w.

Denn von der Linken nach der Rechten entsteht hier ein Glied aus dem nächstvorhergehenden, wenn man letzteres mit $\frac{m-r+1}{r} \frac{q}{p}$ multiplicirt, dieser Bruch wird um ein Glied weiter, wenn man r + 1 für r setzt, $\frac{m-r}{r+1} \frac{q}{p}$ und beide auf einerlei Benennung gebracht zeigen, daß immer der erstere einen größern Zähler hat, also wenn r wächst, der Werth des Bruches immer abnimmt. Dies gibt vor dem größten Gliede eine immer größere Annäherung seines Werthes an 1, also eine immer geringere Vermehrung durch die Multiplication, jenseit des größten Gliedes aber eine immer größere Abweichung seines Werthes von 1, also eine immer größere Verminderung durch die Multiplication. Ist also $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$, $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ u. s. w., so haben wir auch $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ u. s. w. Folglich $\frac{M}{L} < \frac{F+G+H \text{ u. s. w.}}{P+Q+R \text{ u. s. w.}}$.

Nun ließ sich durch den §. 10 bestimmten Werth von n $\frac{M}{L} > t$ darstellen, also wird noch mehr $\frac{F+G+H \text{ u. s. w.}}{P+Q+R \text{ u. s. w.}} > t$ seyn, und $F + G + H$ u. s. w. $> t\,(P+Q+R$ u. s. w.)

Also läßt sich die Summe der n Glieder von M bis L

so vielmal man will größer machen, als die Summe der n nächsten vom L weiter links folgenden Glieder.

Da aber M das nqte Glied in der Reihe ist, so hat L überhaupt noch $nq - n = n(q - 1)$ Glieder links neben sich. Diese kann man in $q - 1$ Gruppen jede zu n Gliedern theilen, bei denen von Gruppe zu Gruppe dieselben Bedingungen wie vorhin gelten.

Nehmen wir daher $t = i(q - 1)$, so wird $F + G + H \ldots L > i(q - 1)(P + Q + R$ u. s. w.). Die Summe der n Glieder nächst den größten zur Linken beträgt also mehr als i mal das $(q - 1)$ fache der ferner folgenden Gruppe von n Gliedern, da nun weiter $q - 1$ solche Gruppen folgen, deren jede folgende kleiner als die vorhergehende, so wird hier die erste Gruppe bei M mehr als i mal größer als alle übrigen Glieder zur Linken.

Vergleichen wir nun die rechts zwischen M und L′ liegenden n Glieder mit den übrigen rechts liegenden Gliedern, so steht alles wie zuvor, nur daß hier noch np Glieder auf M folgen. Wir theilen also diese rechts von L′ in $(p - 1)$ Gruppen zu n Gliedern und machen $\frac{M}{L'} > i(p - 1)$, damit auch hier die n Glieder nächst an M mehr als i mal größer als die Summe aller übrigen Glieder rechterhand werden. Jetzt beträgt die Summe der Glieder zwischen L und L′ (selbst M nicht mitgerechnet) mehr als i mal so viel als alle übrigen Glieder der Entwicklung von $(p + q)^{np+nq}$.

So haben wir also $\frac{L + \ldots + M + \ldots + L'}{(p + q)^{np+nq}}$

$> \frac{i}{i + 1}$, ein Bruch, welcher der 1 immer näher kommt, je größer i wird. Das heißt die Wahrscheinlichkeit, die Zahl der A werde zwischen $\frac{p + 1}{p + q}m$ und $\frac{p - 1}{p + q}m$ bleiben, kann durch Vergrößerung von i der Einheit so nahe gebracht werden, als man will.

Dabei können die hier mit $\frac{p+1}{p+q}$ und $\frac{p-1}{p+q}$ gegebenen Grenzen so enge als man will bestimmt werden, denn p und q sind hier nur Verhältnißzahlen, für welche wir beliebig sp und sq setzen und somit das Verhältniß $p + 1 : p - 1$ der Gleichheit beliebig nahe bringen können.

Wir wiederholen Bernoulli's Beispiel. Er setzt $p = 30$, $q = 20$ und sucht die Anzahl der Ziehungen, welche eine Wahrscheinlichkeit $\frac{1000}{1001}$ gibt, daß das Verhältniß der Anzahl von A zur Zahl aller Ziehungen zwischen den Grenzen $^{30}/_{50}$ und $^{29}/_{50}$ bleibe. Hier müssen wir $i = 1000$ nehmen und in die obigen Formeln $i (q - 1)$ für t setzen in Rücksicht der Glieder zwischen M und L.

Dies gibt $r = \frac{\log. i (q-1)}{\log. (p+1) - \log. p} = \frac{42787536}{142405} < 301$

und $n (p + q) = (r + \frac{rq - q}{p + 1}) (p + q) = 24728$

Für die Glieder M bis L' aber ist $t = i (p - 1)$, also $r = \frac{\log. i (p-1)}{\log. (q+1) - \log. q} = \frac{44623980}{211893} < 211$, $n (p+q) = (p + q) (r + \frac{rp - p}{q + 1}) = 25550$.

Da die letzte Zahl die größere ist, so müssen wir sie wählen, und sind dann sicher, daß bei 25550 Ziehungen die Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen $^{31}/_{50}$ und $^{29}/_{50}$ zu bleiben die $\frac{1000}{1001}$ noch übersteigen.

Bernoulli hat die Rechnung auch noch für die Wahrscheinlichkeiten $\frac{10000}{10001}$, $\frac{100000}{100001}$ ausgeführt; $i = 10000$ gibt ihm 31258 und $i = 100000$ 36966 Ziehungen. Man sieht daraus, daß die Wahrscheinlichkeit hier weit schneller, als die Zahl der Ziehungen anwächst, während i zehnmal so groß wird, wächst die Zahl der Ziehungen jedes mal

nur um den beständigen und gleichen Unterschied von 5708. Wenn wir i in geometrischen Verhältnissen wachsen lassen, so wächst die Zahl der Ziehungen fast nur in arithmetischen, denn setzen wir $\frac{\log.(p-1)}{\log.(q+1)-\log.q}$, welches beständig ist, $= a$, so ist $r = a \log. i$; ferner wenn der Factor $(p+q)\left(1+\frac{p\left(1-\frac{1}{r}\right)}{q+1}\right) = b$, so ist die Zahl der Ziehungen $n(p+q) = b\,r = b\,a \log. i$, dessen Wachsthum im Verhältniß von log. i nur durch den veränderlichen Einfluß von r auf die Bestimmung von b gestört wird.

Sollte statt der beiderseitigen Grenzen $\frac{p+1}{p+q}$ und $\frac{p-1}{p+q}$ nur gefragt werden nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der A zu allen Fällen nicht kleiner als $\frac{p-1}{p+p}$ würde, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür noch um so mehr beliebig groß gemacht werden können, da man dafür nicht nur die Glieder von L bis L' sondern auch noch alle links von L liegenden vom Anfang der Entwicklung an zu summiren hat.

§. 13.

1) Wir haben im §. 4. die Bestimmung der Combinationen und der Anzahl von Versetzungen einer jeden mit Wiederholungen und für n Elemente auf die Form der Potenzen einer n-theiligen Größe verwiesen, davon aber bisher nur auf das Binomium die Anwendung gemacht. Allgemeiner müssen wir jetzt noch die Form der Potenzen des Polynomium überhaupt beachten.

Die Entwicklung von der ntheiligen Größe $(a+b+c+d+e\ldots)^m$ ist $= {}^{m}\overset{m}{C} + m^{m+1}\overset{m}{C} + m^{m+2}\overset{m}{C} \ldots + m^{m+n}\overset{m}{C} \ldots\ldots + {}^{m\,n}\overset{m}{C}$, zum Zeiger $\left(\begin{matrix}1&2&3&4&5&\ldots\\a&b&c&d&e&\ldots\end{matrix}\right)$

Also das allgemeine Glied

$$\frac{m!}{p!\,q!\,r!\,s!\,t!} a^p\, b^q\, c^r\, d^s\, e^t \ldots$$

unter der Bedingung $p + q + r + s + t \ldots = m.$
und $q + 2r + 3s + 4t \ldots = n.$

So gehört z. B. $a^3\, b^4\, c^2\, d\, e$ zu den Entwicklungen von $(a + b + c + d + e)^{11}$ und hat die Versetzungszahl, im Glied $m^{11+15}\overset{11}{C}$, $\frac{(11)!}{(3)!\,(4)!\,(2)!} = 4.5.7.9.10.11 =$ 138600 neben sich.

2) Setzen wir nun in §. 7 statt der zweierlei Kugeln a weiße, b schwarze, c grüne, d rothe und so ferner, auch $a + b + c + d + e \ldots = k$, so ist die einfache Wahrscheinlichkeit der einzelnen Farbe $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}, \frac{e}{k} \ldots$

Die Anzahl aller möglichen Fälle für m Ziehungen wird durch $(a + b + c + d + e \ldots)^m$ gemessen; das allgemeine Glied gibt die Anzahl der möglichen Fälle für die verbundenen

p der ersten Art
q der zweiten „
r der dritten „
s der vierten „

wenn $p + q + r + s \ldots = m.$

Folglich das allgemeine Glied dividirt durch $(a + b + c + d + e \ldots)^m$ die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges.

Wir können also für a, b, c, d, e . . . auch die Verhältnißzahlen der einfachen Wahrscheinlichkeiten der Ziehungen jeder Art setzen.

3) Der wahrscheinlichste unter allen Erfolgen von m Ziehungen ist auch hier der, in welchem sich die Zahl der einzelnen Ereignisse wie ihre einfache Wahrscheinlichkeit verhält.

Setzen wir nämlich $m = n\,(a + b + c + d + e \ldots)$, so ist für das Binomium $(a + p)$ erstlich in der Entwicklung von $(a + p)^{n(a+p)}$ das Glied mit $a^{na}\, p^{np}$ das größte. Setzen wir nun $p = b + q$, so ist wieder in der Entwicklung von

$p^{np} = (b+q)^{n(b+q)}$ das größte Glied das mit $b^{nb} q^{nq}$. Aber wieder $q = c + r$ gesetzt, gibt in der Entwicklung von $(c+r)^{nc+r}$ zum größten Glied das mit $c^{nc} r^{nr}$ u. s. f., so daß allgemein das Glied mit $a^{na} b^{nb} c^{nc} d^{nd} e^{ne} \ldots$ das größte von allen bleibt.

§. 14.

Man sieht aus dem Vorigen, daß die Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten uns schnell zur Behandlung sehr großer Zahlen führen. Hier wird es bald unthunlich, diese ganz darzustellen, aber dabei sehr wichtig, ihre Verhältnisse annäherungsweise angeben zu können. Die dahin gehörenden Methoden hat Laplace in seiner théorie analytique du calcul des probabilités am weitesten ausgeführt. Wir verweilen hier bei den Aufgaben, welche uns die vorigen Paragraphen gaben, das heißt bei der Berechnung einzelner Coefficienten oder Glieder der Potenzen des Binomium $(p+q)^m$ für höhere Werthe von p, q und m.

Um Versetzungszahlen (m!), deren Producte und Quotienten, wie sie die fraglichen Coefficienten bestimmen, zu berechnen, bedienen wir uns der von Stirling gefundenen Reihe für die Summen von Logarithmen, deren Zahlen eine arithmetische Reihe bilden. Denn $\log. (m!) = \log. (1 . 2 . 3 \ldots m) = \log. 1 + \log. 2 + \log. 3 \ldots + \log. m$.

Kramp*) stellt diese Formel bequem dar. Wenn $\mathfrak{S}\, x$ die Summe der Reihe $\frac{1}{12} x - \frac{1}{3} . \frac{1}{120} x^3 + \frac{1}{5} . \frac{1}{252} x^5 - \frac{1}{7} . \frac{1}{240} x^7 \ldots$ ins Unendliche bedeutet, (deren Coefficienten aus den Bernoullischen Zahlen verbunden mit der Reihe $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ bestehen), so ist $\log. m! = - \mathfrak{S}\, 1 - m + (m + \frac{1}{2}) \log. (m+1) + \mathfrak{S} \frac{1}{m+1}$, wobei die Logarithmen natürliche sind; also $(- \mathfrak{S}\, 1 - m + \mathfrak{S} \frac{1}{m+1})$ erst

*) Arithmétique universelle. §. 602.

mit 0,4342945 multiplicirt werden müssen, wenn man mit gewöhnlichen Logarithmen rechnen will.

Die Constante $\mathfrak{S}\ 1$ bestimmt sich leicht, wenn man für m! einen bekannten Werth, z. B. $9! = 720 \times 504$ nimmt und $\mathfrak{S}\ 1 = -9 + 9\frac{1}{2} \log. 10 + \mathfrak{S}\ \frac{1}{10}$ berechnet, woraus $\mathfrak{S}\ 1 = 0{,}0810615$ gefunden wird.

Man verlange z. B. wie §. 5. $\frac{52!}{24^{13}}$. Log. $\frac{52!}{24^{13}} = -\mathfrak{S}\ 1 - 52 + 52\frac{1}{2} \log. 53 + \mathfrak{S}\ \frac{1}{53} - 13 \log. 24$.

Für $\mathfrak{S}\ \frac{1}{53}$ brauchen wir auf 7 Decimalstellen genau nur das erste Glied der Reihe für $\mathfrak{S}$. Also $\mathfrak{S}\ \frac{1}{53} = \frac{1}{12.53} = 0{,}0015723$. Also $\mathfrak{S}\ \frac{1}{53} - \mathfrak{S}\ 1 - 52 = -52{,}0794892$ mit 0,4342945 multiplicirt gibt $-22{,}61784$.

Ferner $\log. 53 = 1{,}7242759$
$52\frac{1}{2} \log. 53 = 90{,}524484$
$- 22{,}61784$

$\log. 52! = 67{,}90664$ einer Zahl mit 67 Ziffern vor dem Comma, von denen die höchsten 80658, gehörend.

$\log. 24 = 1{,}3802112$
$13 \log. 24 = 17{,}942745$

Also $\log. \frac{52!}{24^{13}} = 59{,}95389$ und dessen Zahl eine Zahl von 59 Ziffern, deren höchste 89925 Nonillionen.

Verlangt man einen einzelnen Coefficienten aus der Entwicklung von $(p + q)^m$, so ist dafür die Formel $\frac{m . m-1 \ldots m-r+1}{1 . 2 . \ldots r}$, welches als $\frac{m!}{(m-r)! + r!}$ wie vorhin oder auch so berechnet werden kann, daß man $\log. (m + 1 - r) \ldots m - 1 . m = -r + (m+1) \log. (m+1) - (m+1-r) \log. (m+1-r) - \frac{1}{2} \log. \left(\frac{m+1}{m+1-r}\right) + \mathfrak{S}_{\frac{1}{m+1}} - \mathfrak{S}_{\frac{1}{m+1-r}}$, setzt.

Es sei z. B. die Wahrscheinlichkeit des mittlern Gliedes in der Entwicklung von $(p + q)^m$ wie §. 10. in Frage, wenn $m = 100$ und $p = q$. Sie ist $= \frac{100!}{(50!)^2} \cdot \frac{1}{2^{100}}$. Also ihr Logarithmus $= \log. (100!) - 2 \log. (50!) - 100 \log. 2$.

$$\text{Log.}(100!) = -100 - S\,1 + S\,{}^1/_{101} + (100^1/_2) \log. 101.$$

$$\begin{aligned}
-100 - S\,1 &= 100{,}0810615 \\
+ S\,{}^1/_{101} &= 0{,}0008250 \\
\hline
&- 100{,}0801365 \times 0{,}4342945 \\
&= - 43{,}46425\ ;\ \log. 101 = 2{,}0043214\,; \\
(100^1/_2) \log. 101 &= 201{,}43430 \\
\hline
\log. (100!) &= 157{,}97005
\end{aligned}$$

$$\log. (50!) = -50 - S\,1 + S\,{}^1/_{51} + (50^1/_2) \log. 51.$$

$$\begin{aligned}
-50 - S\,1 &= 50{,}0810615 \\
+ S\,{}^1/_{51} &= 0{,}0016339 \\
\hline
&- 50{,}0794276 \times 0{,}4342945 \\
&= - 21{,}74921\ ;\ \log. 51 = 1{,}7075702 \\
(50^1/_2) \log. 51 &= 86{,}232295 \\
\hline
\log. (50!) &= 64{,}48308\ ;\ 2 \log. (50!) = 128{,}96616 \\
&\phantom{= 64{,}48308\ ;\ } 100 \log. 2 = 30{,}10300 \\
\hline
&\phantom{= 64{,}48308\ ;\ 100 \log. 2 = } 159{,}06916
\end{aligned}$$

Also der gesuchten Wahrscheinlichkeit Logarithmus $= 0{,}90089 - 2$, und ihre Zahl $= 0{,}07959$.

2) Stirlings Formel setzt unmittelbar $\log. (m!) = {}^1/_2 \log. 2\pi + (m + {}^1/_2) \log. m - m + {}^1/_{12} m - {}^1/_{360} m^3 \ldots$, wobei π die Zahl des Verhältnisses vom Kreisumfang zum Durchmesser und die Constante ${}^1/_2 \log. 2\pi = 0{,}3990899341790$.

Gehen wir hier von den Logarithmen zu den Zahlen selbst, indem wir die Basis der natürlichen Logarithmen $2{,}7182818 = e$ setzen, so wird $(m!) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-m} \cdot m^{m + 1/2} \cdot e^{1/12\, m - 1/360\, m^3 \ldots}$ worin der letzte Factor bei großen Werthen von m sich immer mehr der 1 nähert.

Wollen wir dadurch die allgemeine Form eines Coefficienten des Binomiums $\frac{m \cdot m-1 \ldots m-r+1}{1 \cdot 2 \ldots r}$ bestimmen, so ergibt sich zuerst

$$m \cdot m-1 \ldots m-r+1 = \frac{m!}{(m-r)!} =$$

$$\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{e^m} \cdot \frac{e^{m-r}}{(m-r)^{m-r+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12m}} \cdots}{e^{\frac{1}{12(m-r)}} \cdots} =$$

$$\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{e^r \cdot (m-r)^{m-r+\frac{1}{2}}} \times e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m-r}\right)-\cdots}$$

Ferner dieses durch $(r!)$ dividirt =

$$\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot r^{r+\frac{1}{2}} (m-r)^{m-r+\frac{1}{2}}} \times e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m-r}-\frac{1}{r}\right)-\cdots}$$

Setzen wir darin $m = 2r$ für das mittelste Glied und dividiren mit 2^{2r}, um für den Fall $(p = q)$ die diesem Gliede entsprechende Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, so findet sich nach geschehener Reduction $\frac{1}{\sqrt{\pi r}} \cdot e^{-\frac{1}{8}r+\frac{1}{192}r^3-\cdots}$ woraus sich die Wahrscheinlichkeit für 50 A 50 B bei $m = 100$ noch leichter als oben berechnen läßt. Zugleich fällt ins Auge, daß dieser Werth bei steigendem Werthe von m oder r unter jede Grenze sinken kann.

3) Setzen wir für die Bestimmung des größten Gliedes, wenn p nicht gleich q, $m = np + nq$ und $r = nq$, so wird der Coefficient

$$\frac{(np+nq)^{np+nq+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot nq^{nq+\frac{1}{2}} \cdot np^{np+\frac{1}{2}}} \times e^{\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\cdots}$$

$$= \frac{(p+q)^{np+nq+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\, npq} \cdot p^{np}\, q^{nq}} \times e^{\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\cdots}$$

um die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen wir dies mit $\frac{p^{np} q^{nq}}{(p+q)^{np+nq}}$ multipliciren; diese ist also

$$\sqrt{\frac{p+q}{2\pi\, npq}} \cdot e^{\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{p+q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \cdots}$$

Ein Ausdruck dessen Werth mit steigenden Werthen von n unter jede Grenze vermindert werden kann, wie §. 11. behauptet wurde.

4) Das Verhältniß irgend zweier Glieder der Entwicklung von $(p+q)^m$, zu denen $p^{m-r} q^r$ und $p^{m-k} q^k$ gehören, ist, mit Weglassung der Exponentialreihe,

$$\frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{r^{r+\frac{1}{2}} (m-r)^{m-r+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k^{k+\frac{1}{2}} (m-k)^{m-k+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{q^{r-k}}{p^{r-k}}$$

$$= \frac{k^{k+\frac{1}{2}} (m-k)^{m-k+\frac{1}{2}}}{r^{r+\frac{1}{2}} (m-k)^{m-k+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{q^{r-k}}{p^{r-k}}$$

Setzen wir darin $m = np, + nq$, $r = nq$, $k = nq - n$, so erhalten wir den einfachen Ausdruck von merkwürdiger Form

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^{nq-n+\frac{1}{2}} \left(\frac{p+1}{p}\right)^{np+n+\frac{1}{2}}$$

Dieser Ausdruck erhält einen mit n über jede Grenze steigenden Werth, wie folgende Entwicklung zeigt, und wie §. 11. schon behauptet wurde.

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^{nq-n} = e^{n(q-1)\log.\left(\frac{q-1}{q}\right)}$$

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^{np+n} = e^{n(p+1)\log.\left(\frac{p+1}{p}\right)}$$

$$\log.\left(\frac{q-1}{q}\right) = \log.\left(1 - \frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q} - \frac{1}{2q^2} - \frac{1}{3q^3} \cdots$$

$$\log.\left(\frac{p+1}{p}\right) = \log.\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} \ldots$$

Dies gibt

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^{nq-n}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{np+n} = e^{n\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}-\frac{1}{6p^2}+\frac{1}{6q^2}\right)\cdots}$$

einen Ausdruck der mit steigenden Werthen von n ins Unendliche wächst, in unserm Ausdruck aber nur mit der beständigen Größe $\left(\frac{q-1}{q}\cdot\frac{p+1}{p}\right)^{1/2}$ multiplicirt ist.

Nehmen wir $k = nq + n$, so würde dadurch nur der Werth von p und q umgewechselt.

5) Setzen wir in der hier 2) gegebenen allgemeinen Formel für die Coefficienten der Entwicklung von $(p+q)^m$ $m = np + nq$, $r = nq - k$, also $m - r = np + k$ und multiplicirt man diesen Ausdruck dann mit $\frac{p^{np+k}\, q^{nq-k}}{(p+q)^{np+nq}}$ so ergibt sich

$$\frac{(p+q)^{np+nq+1/2}}{\sqrt{2\pi}\,(nq-k)^{nq-k+1/2}(np+k)^{np+k+1/2}} \times \frac{p^{np+k}\, q^{nq-k}}{(p+q)^{np+nq}}$$
$$\times\, e^{1/12\left(\frac{1}{np+nq} - \frac{1}{np+k} - \frac{1}{nq-k}\right) - \ldots}$$

Hier kann man dem ersten Factor die Form geben

$$\frac{(p+q)^{np+nq+1/2}}{\sqrt{2\pi n}\,.\,q^{nq-k+1/2}\,p^{np+k+1/2}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{k}{nq}\right)^{nq-k+1/2}\left(1-\frac{k}{np}\right)^{np+k+1/2}}$$

Dies multiplicirt mit dem zweiten Factor, gibt

$$\frac{\sqrt{\frac{p+q}{2\pi\, npq}}}{\left(1-\frac{k}{nq}\right)^{nq-k+1/2}\left(1+\frac{k}{np}\right)^{np+k+1/2}}$$

Darin können wir

$$\left(1-\frac{k}{nq}\right)^{nq-k+\frac{1}{2}}=e^{(nq-k+\frac{1}{2})\log.\left(1-\frac{k}{nq}\right)}$$

$$\left(1+\frac{k}{np}\right)^{np+k+\frac{1}{2}}=e^{(np+k+\frac{1}{2})\log.\left(1+\frac{k}{np}\right)}$$

setzen und die Exponenten von e addiren. Dies gibt für die Summen dieser Exponenten $\frac{k\,(p-q)}{2\,npq}+\frac{k^2(p+q)}{2\,npq}\ldots.$

Ist nun hier k klein genug im Verhältniß zu np und nq, so kann man näherungsweise von der ganzen Entwicklung nur das eine Glied, welches k^2 mit den ersten Potenzen von diesen verbindet, beibehalten. Läßt man dann auch noch die Exponentialgröße, welche den dritten Factor bildet, als hinlänglich nahe an 1 weg, so bleibt nur

$$\sqrt{\frac{p+q}{2\pi\,npq}}\,.\,e^{-\frac{p+q}{2\,npq}k^2}$$

Dieser Ausdruck gibt also einen Näherungswerth für das Verhältniß irgend eines Gliedes der Entwicklung von $(p+q)^{np+nq}$ zu dieser ganzen Entwicklung.

Vergleichen wir nun damit den (3.) gefundenen Werth für das Verhältniß des größten Gliedes, so bleibt

$$e^{\frac{p+q}{2npq}k^2}=1$$

als näherungsweiser Ausdruck für das Verhältniß des größten Gliedes zu dem, welches $p^{np+k}\,q^{nq-k}$ enthält.

Nehmen wir mit Bernoulli z. B. $p=18$, $q=17$, $n=400$; $n(p+q)=1400$ und $k=163$, so erhalten wir 44,7 als Verhältniß des größten Gliedes zu dem um 163 Stellen von ihm entfernten.

Setzen wir nun in §. 11. $\frac{M}{L}=1$, und bezeichnen die Reihe der Glieder-Gruppen jede von k Gliedern von M anfangend mit $g, g', g'', g'''\ldots$ so haben wir

$$\frac{M}{L} = l < \frac{g}{g'}, \frac{g}{g'} < \frac{g''}{g'} \text{ u. s. w.}$$

also $g' < \frac{g}{l}$, $g'' < \frac{g'}{l}$ oder $\frac{g}{l^2}$, $g''' < \frac{g''}{l}$ oder $\frac{g}{l^3}$ u. s. w.

und $g' + g'' + g''' + \ldots < \left(\frac{g}{l} + \frac{g}{l^2} + \frac{g}{l^3} \ldots\right) < \frac{g}{l-1}$.

Da nun dies für jede Anzahl der Gruppen gilt, so ist g oder die Gruppe von k Gliedern nächst bei M zur Summe aller andern in einem größern Verhältniß als $l - 1 : 1$. In $(p + q)^{14000}$ ist also die Summe der 163 Glieder, welche M vorhergehen, und der 163, welche ihm folgen, zusammen mehr als 43,7 mal größer, als die Summe aller übrigen Glieder der Entwicklung.

6) Eine directe Annäherung an den Werth dieser Summe gibt die Anwendung von Eulers Summenreihe $Su = \int u dx + \frac{1}{2} u + \frac{1}{12} \frac{du}{dx} + \ldots$ auf $\sqrt{\frac{p+q}{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{p+q}{2npq}k^2}$ wenn man das Integral zwischen den Grenzen $k = o$ und $k =$ einem beliebigen größten Werth nimmt.

Setzen wir $x = k$, $u = be^{-ak^2}$ so folgt $S\,be^{-ak^2} = b\int e^{-ak^2} dk + \frac{1}{2} be^{-ak^2} - \frac{1}{6} bake^{-ak^2} + \ldots$ Hier ist für unsern Fall $a = \frac{p+q}{2npq}$, $b = \sqrt{\frac{p+q}{2\pi npq}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$. Also ab sehr klein; wir können uns näherungsweis auf die ersten beiden Glieder beschränken, und erhalten also den Werth der Summe $k\sqrt{a} = t$ gesetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-t^2}.$$

wobei t von $t = o$ bis zum angenommenen höchsten Werth genommen werden muß. Diese Summe doppelt genommen und dann M dazu gethan gibt die verlangte Summe der $2 + k\,1$ größten Glieder der Entwicklung.

§. 15.

Mit diesem ganzen Apparat von §. 11. und 12. haben wir nach Lacroix den Beweis für das Gesetz des Jakob Bernoulli dargestellt, daß die Wechsel der Erscheinungen im Durchschnitt, wenn die Zahl der Wiederholungen nur groß genug ist, im Verhältniß der einfachen Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen entgegengesetzten Ereignisse erfolgen. Bedenken wir nun aber, daß wir von der Voraussetzung ausgingen, daß uns eine in ihre gleichmöglichen Fälle getheilte Sphäre der Erkenntniß (z. B. das Spiel mit richtigen Würfeln nach bestimmten Regeln, das Spiel mit diesen 52 Kartenblättern nach bestimmten Regeln) gegeben sei; welche Theilung wir hier durch das Verhältniß p : q der Fälle für A zu denen für B ausdrückten, so ist nicht zu verkennen, daß in dieser Voraussetzung schon liege, daß, wenn wir wiederholt unter diesen Bedingungen den Wechsel der Begebenheiten beobachten, bei hinlänglich vielen Beobachtungen sich A und B im Durchschnitt des Ganzen im Verhältniß p : q zeigen werden, denn sonst hätte der Ausdruck »Zahl der gleichmöglichen Fälle« keine feste Bedeutung. Das fragliche Gesetz gilt also eigentlich schon logisch und dadurch auch rein mathematisch. Die hier gegebenen Vergleichungen mit den Potenzen des Binomium und Polynomium dienen nur, um zu zeigen, wie sich diese Verhältnisse in der Rechnung für die Wiederholung der Ereignisse darstellen. Die Bedeutung unsers Gesetzes ist durch die mathematische Fiction der gleichmöglichen Fälle (§. IX. am Ende) bestimmt. Wollen wir Anwendungen davon machen, so müssen wir jedesmal erst diese Bedingung in irgend einem Kreise der Erscheinungen feststellen.

Zweites Kapitel.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit, wenn die Theilung der Sphäre in ihre gleichmöglichen Fälle selbst erst errathen werden muß, oder Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori.

§. 16.

Für die zweite Aufgabe der reinen Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmten wir die Fälle, bei denen die Theilung einer Sphäre in ihre gleichmöglichen Fälle noch nicht bekannt ist, wo wir aber Reihenfolgen der durch sie bedingten Ereignisse beobachten, und aus diesen ihre Theilung zu berechnen versuchen.

Das einfachste rein combinatorische Schema ist hier ein Gefäß mit Kugeln, von denen wiederholt eine gezogen, die gezogene aber wieder eingelegt wird*). Dabei können wir zwei Fälle sondern. Im ersten Fall ist eine Uebersicht der ganzen in Frage stehenden Sphäre schon mit Sicherheit gegeben und die Rechnung hat es nur mit der Eintragung der Eintheilungen in dieselbe zu thun. Wir wissen, wie viele Kugeln überhaupt im Gefäße sind, die Ziehungen zeigen ihre Verschiedenartigkeit, die Rechnung soll ausweisen, wie viele von jeder Art wahrscheinlich vorhanden seyen.

Im andern Fall sind wir nur im Besitz gewisser Reihenfolgen von Erscheinungen, die einer bestimmten, übrigens unbekannten Sphäre gehören, Ganzes und Verhältniß der Theile in ihm muß erst errathen werden. Hier kennen wir auch die Anzahl aller Kugeln nicht und können uns nur an den Erfolg der Ziehungen halten, um eine Rechnung einzuleiten.

---

*) Können wir nämlich wiederholt ziehen und die gezogene Kugel zurückhalten, so verläuft die Beobachtung nicht nach Wahrscheinlichkeit, sondern die Grundlagen einer Wahrscheinlichkeit a priori werden mit voller Gewißheit bestimmt. Wir verweilen daher hier nur bei dem unbestimmteren Fall.

Die Anzahl der Kugeln kann unbegrenzt sein, man sucht nur Verhältnißzahlen ihrer verschiedenen Arten zu errathen.

Für alle diese Berechnungen ist das Princip der im Vorigen bewiesene Hauptsatz, daß, wenn die Bedingungen der Eintheilung der Sphäre dieselben bleiben, bei lange fortgesetzten Beobachtungen die Verhältnisse der beobachteten Ereignisse mit immer steigender Wahrscheinlichkeit der Theilung der Sphäre selbst entsprechen. Wir werden demgemäß in besondern Reihenfolgen von Begebenheiten bald bei constanten Verhältnissen der Eintheilung diese selbst immer genauer, bald bei unbeständigeren Verhältnissen derselben entweder die Veränderung derselben, oder nur den Erfolg für die nächste Zukunft, so weit jene Veränderungen noch klein genug bleiben, mit Wahrscheinlichkeit zu berechnen versuchen.

Diesen allgemeinsten Gesetzen wollen wir, vom einfacheren anfangend, genauer nachgehen.

§. 17.

Ein Gefäß enthalte 4 Kugeln; 4 Ziehungen zeigen 3 mal eine weiße und einmal eine schwarze. Weiß man nun nicht, wie viel weiße und wie viel schwarze Kugeln unter den 4 Kugeln des Gefäßes sind, so folgt aus dem Ergebniß dieser Ziehungen doch, daß wenigstens eine weiße und auch eine schwarze darin sei. Möglich bleiben noch folgende drei Voraussetzungen, für deren jede wir die Wahrscheinlichkeit, c eine weiße und f eine schwarze zu ziehen, angeben können.

3 weiße und eine schwarze geben $c = 3/4$, $f = 1/4$

2 weiße und zwei schwarze geben $c = 1/2$, $f = 1/2$

1 weiße und drei schwarze geben $c = 1/4$. $f = 3/4$.

Die Wahrscheinlichkeit, 3 mal weiß und 1 mal schwarz gezogen zu haben, wäre nun bei jeder von diesen Voraussetzungen eine andere, indem wir sie (§. 8.) durch $4\,c^3 f$ bestimmt fanden. Sie wird nach der Reihe

$$27/64\ ,\ 16/64\ ,\ 3/64\ .$$

Das wirklich beobachtete Verhältniß würde also unter diesen drei Voraussetzungen am wahrscheinlichsten bei der er-

sten, und am unwahrscheinlichsten bei der letzten seyn. So wird denn im Allgemeinen erhalten, daß wir bei den Fragen dieser Art eine Uebersicht aller Voraussetzungen suchen müssen, welche bei den gegebenen Beobachtungen neben einander möglich bleiben, und daß, wenn wir nun nach jeder von ihnen die Wahrscheinlichkeit des gefundenen Erfolgs berechnen, wir die Wahrscheinlichkeit der Voraussetzung selbst nach derselben Zahl zu messen haben. Wir erhalten den Grundsatz: die Wahrscheinlichkeiten der Voraussetzungen verhalten sich hier wie die Wahrscheinlichkeiten, welche die beobachteten Ereignisse selbst nach jeder von den Voraussetzungen hätten.

Haben wir nun eine vollständige Aufzählung aller Voraussetzungen in unserer Gewalt, so muß eine von ihnen die geltende seyn, und also ist die Summe aller ihrer Wahrscheinlichkeiten zusammengenommen der vollen Gewißheit gleich, = 1. In unserm Beispiel verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten der Voraussetzungen unter einander wie 27, 16, 3; addiren wir also diese Zahlen, so gibt die Summe die Zahl aller hier möglichen Fälle, und die Brüche $^{27}/_{46}$, $^{16}/_{46}$, $^{3}/_{46}$ geben die Wahrscheinlichkeiten der Voraussetzungen selbst an.

Wir erhalten also die Wahrscheinlichkeit jeder Voraussetzung, wenn wir die nach jeder Voraussetzung berechnete Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Erfolges durch die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten dividiren.

Seyen allgemein h, h', h'', h''' die Wahrscheinlichkeiten der nach den beobachteten Erfolgen möglichen Voraussetzungen, und a, a', a'', a''' der Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Erfolgs nach jeder von ihnen, so haben wir

$$h + h' + h'' + h''' = 1.$$

$$h : a = h' : a' = h'' : a'' = h''' : a'''$$

also $a + a' + a'' + a''' = J$ gesetzt $h = \frac{a}{J}$, $h' = \frac{a'}{J}$ u. s. f. als eine eigne Art mittlerer Wahrscheinlichkeit a posteriori.

2) Diese Vergleichungen können wir auf zweierlei Weise

anzuwenden suchen. Einmal um die wahre Beschaffenheit der Kugeln im Gefäß zu erforschen, welche Verfahrungsart man die mathematische Induction nennen könnte; zum andern nur um die Wahrscheinlichkeit für die nächstfolgende Ziehung zu bestimmen.

Für das erste berufen wir uns ganz auf Bernoulli's Gesetz, daß, bei hinlänglicher Vermehrung der Ziehungen, das Ganze aller Beobachtungen uns die Erscheinungen im wahren Verhältniß ihrer Ursachen zeigt. Nach unserm Beispiel wären nach 4 Ziehungen die Wahrscheinlichkeiten der drei Voraussetzungen in den Verhältnissen 27, 16, 3. Noch so viele Ziehungen können uns freilich die Unmöglichkeit keiner von diesen Voraussetzungen beweisen; allein so wie ihre Zahl wächst, wird doch die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Voraussetzung immer vorherrschender. Gesetzt 8 Ziehungen hätten 6 mal weiß und 2 mal schwarz ausgewiesen, so müßte das Glied $28\, c^6 f^2$ verglichen werden. Dies gibt nach den drei Voraussetzungen

$$3^6 = 729 \; ; \; 2^8 = 256 \; ; \; 3^2 = 9$$

als Verhältnißzahlen der Wahrscheinlichkeit, so daß die letzte, welche vorhin noch $1/9$ der ersten war, nun nur noch $1/81$ derselben ist; die der ersten aber, die noch nicht $5/8$ betrug, jetzt über $8/11$ gestiegen ist.

Wären aber in 12 Ziehungen nach demselben Verhältniß 9 mal weiß und 3 mal schwarz erschienen so bestimmte das Glied $220\, c^9 f^3$

$$3^9 = 19683 \; ; \; 2^{12} = 4096 \; ; \; 3^3 = 27$$

als Verhältnißzahlen, wo die Wahrscheinlichkeit der ersten Voraussetzung fast $5/6$ erreicht, die der zweiten nicht mehr $1/6$ ausmacht, und die der letzten nur $1/729$ der ersten ist.

Soll hingegen aus dem, was die früheren Ziehungen ergaben, die Wahrscheinlichkeit eines geforderten Ereignisses für die nächste Ziehung bestimmt werden, so wird aus §. 3. leicht klar seyn: wir müssen die Wahrscheinlichkeit desselben nach jeder Voraussetzung berechnen die einzelne davon aber nur nach dem Verhältniß gelten lassen, als die Voraussetzung selbst wahrscheinlich ist; wir müssen also die Wahrscheinlichkeit

des Ereignisses nach jeder Voraussetzung mit der Wahrscheinlichkeit dieser Voraussetzung multipliciren und alle diese Producte addiren, um die ganze Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses zu erhalten. Wenn wir in unserm Beispiel aus 4 Ziehungen die Wahrscheinlichkeit für die fünfte bestimmen wollen, so ergibt sich für die Ziehung einer weißen Kugel

$$^{27}/_{46} \times {}^{3}/_{4} + {}^{16}/_{46} \times {}^{2}/_{4} + {}^{3}/_{46} \times {}^{1}/_{4} = {}^{116}/_{184};$$

für eine schwarze aber

$$^{28}/_{46} \times {}^{1}/_{4} + {}^{16}/_{46} \times {}^{2}/_{4} + {}^{3}/_{46} \times {}^{3}/_{4} = {}^{68}/_{184}.$$

Wir wollen dafür allgemeine Ausdrücke suchen. Die Anzahl der möglichen Voraussetzungen hängt von der Zahl aller Kugeln ab, die im Gefäße sind. Haben wir es nun nur mit dem Wechsel zweier entgegengesetzter Ereignisse A und B (nur mit weißen und schwarzen Kugeln) zu thun und die Anzahl aller Kugeln ist y, so gibt es überhaupt y — 1 mögliche Voraussetzungen von 1 A (y — 1) B bis (y — 1) A 1 B.

Hätten wir nun m mal A und n mal B beobachtet, so wäre die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges für jede einzelne Voraussetzung durch $^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, c^{m}\, f^{n}$ in der Entwicklung von $(c + f)^{m+n}$ zu messen, wobei c und f die jeder Voraussetzung gehörenden **einfachen Wahrscheinlichkeiten** c für, f wider A sind.

Also gibt die Voraussetzung, daß im Gefäß enthalten seyen

$$1\,A\ (y-1)\,B \quad \ldots \quad c = \frac{1}{y},\ f = \frac{y-1}{y}$$

$$2\,A\ (y-2)\,B \quad \ldots \quad c = \frac{2}{y},\ f = \frac{y-2}{y}$$

. . . .

$$(y-1)\,A\ 1\,B \quad \ldots \quad c = \frac{y-1}{y},\ f = \frac{1}{y}.$$

Setzen wir nun $\frac{1}{y} = \alpha$, so erhalten wir für c die Reihe $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots (y-1)\,\alpha$, und die entsprechenden Werthe für f sind $(1-\alpha), (1-2\alpha) \ldots (1-[y-1]\,\alpha)$.

Danach ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten des beobachteten Erfolges für jede einzelne Voraussetzung;

$$\text{für } 1\,A\,(y-1)\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n} \left(\frac{1}{y}\right)^{m} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{n} = \frac{{}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\; 1^{m}\,(y-1)^{n}}{y^{m+n}}$$

$$2\,A\,(y-2)\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n} \left(\frac{2}{y}\right)^{m} \left(\frac{y-2}{y}\right)^{n} = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, \frac{2^{m}\,(y-2)^{n}}{y^{m+n}}$$

. . . .

$$(y-1)\,A\,1\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{m} \left(\frac{1}{y}\right)^{n} = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, \frac{(y-1)^{m}\,1^{n}}{y^{m+n}}$$

$$\text{für } 1\,A\,(y-1)\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, \alpha^{m}\,(1-\alpha)^{n}$$

$$2\,A\,(y-2)\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, (2\,\alpha)^{m}\,(1-2\,\alpha)^{n}$$

. . . .

$$(y-1)\,A\,1\,B = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\, (1-\alpha)^{m}\,\alpha^{n}.$$

Da sich nun die Wahrscheinlichkeiten der Voraussetzungen eben so verhalten, so ergibt sich deren Verhältniß wie

$$\alpha^{m}\,(1-\alpha)^{n},\ (2\alpha)^{m}(1-2\,\alpha)^{n} \;.\;.\;.\; (1-\alpha)^{m}\,\alpha^{n}$$

und setzen wir dann die Summe aller dieser Glieder $\alpha^{m}\,(1-\alpha)^{n} + (2\,\alpha)^{m}\,(1-2\,\alpha)^{n} \;.\;.\;. + (1-\alpha)^{m}\,\alpha^{n} = {}^{(m,\,n)}Z$, so ist die Wahrscheinlichkeit der Voraussetzungen selbst

$$\frac{\alpha^{m}\,(1-\alpha)^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z},\ \frac{(2\,\alpha)^{m}\,(1-\alpha)^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z},\ .\;.\;.\ \frac{(1-\alpha)^{m}\,\alpha^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z}.$$

Wenn nun die Frage wird, wie wahrscheinlich es sei, in der nächsten Ziehung noch 1 A oder 1 B zu erhalten, so sollen wir die Wahrscheinlichkeit jeder Voraussetzung mit der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses in ihr multipliciren und die Summe aller dieser Werthe nehmen. Dies gibt für A

$$\frac{\alpha\,.\,a^{m}\,(1-\alpha)^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z} + \frac{2\,a\,(2\,\alpha)^{m}\,(1-2\,\alpha)^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z} \;.\;. + \frac{(1-\alpha)\,(1-\alpha)^{m}\,\alpha^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z}$$

$$= \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha)^{n} + (2\alpha)^{m+1}(1-2\alpha)^{n} \ldots + (1-\alpha)^{m+1}\alpha^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z} = \frac{{}^{([m+1],\,n)}Z}{{}^{(m,\,n)}Z}$$

Analog für $B = \frac{{}^{(m,\,n+1)}Z}{{}^{(m,\,n)}Z}$.

Fragen wir endlich noch, wie wahrscheinlich es sei in noch p Ziehungen (p—q) mal A und q mal B zu erhalten, so müssen wir die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges nach dem Glied ${}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}\, c^{p-q} f^{q}$ aus der Entwicklung von $(c+f)^{p}$ für jede Voraussetzung bestimmen, dann jedesmal mit der Wahrscheinlichkeit der Voraussetzung multipliciren und die Summe aller dieser Producte nehmen. Dies gibt

$${}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}\ \alpha^{p-q}(1-\alpha)^{q} \times \frac{\alpha^{m}(1-a)^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z} + {}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}(2\alpha)^{p-q}(1-2\alpha)^{q} \times \frac{(2\alpha)^{m}(1-2\alpha)^{n}}{{}^{m,\,n}Z}$$

$$\ldots + {}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}(1-\alpha)^{p-q}\alpha^{q} \times \frac{(1-\alpha)^{m}\alpha^{n}}{{}^{(m,\,n)}Z} = \frac{{}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}}{{}^{(m,\,n)}Z} \times \Big(\alpha^{m+p-q}$$

$$(1-\alpha)^{n+q} + (2\alpha)^{m+p-q}(1-2\alpha)^{n+q} \ldots + (1-\alpha)^{m+p-q}\alpha^{n+q}\Big) = {}^{p}\overset{q}{\mathfrak{B}}$$

$$\times \frac{{}^{([m+p-q],\,n+q)}Z}{{}^{(m,\,n)}Z}.$$

§. 1.

Der andere Fall hierher gehörender Aufgaben war der, wo wir nur im Besitz einer Reihenfolge von Beobachtungen sind, die einer bestimmten, unserer Rechnung übrigens unbekannten Sphäre gehören, so daß sowohl das Ganze, als das Verhältniß der Theile erst errathen werden müßte.

1) Da uns hier auch das y oder die Anzahl der möglichen Fälle für eine Ziehung unbekannt ist, so können wir mit den gegebenen Beobachtungen nur den einzigen Grundsatz vergleichen, daß jede Wahrscheinlichkeit irgend einen Werth zwischen 0 und 1 habe. Es bleibt uns daher nichts möglich, als für die einfache Wahrscheinlichkeit eines einzelnen, unter den gegebenen Bedingungen stehenden Ereignisses alle Werthe zwischen 0 und 1 vorauszusetzen, in jeder von diesen Voraus-

setzungen die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges zu berechnen, und aus allen diesen dann eine mittlere Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, deren Voraussetzung wir als wahrscheinlich geltend annehmen.

Nach dem vorigen Paragraphen ist also diese Wahrscheinlichkeit

$$^{m+n}\mathfrak{B}^{n} \times \frac{\alpha^{m}(1-\alpha)^{n}+(2\alpha)^{m}(1-2\alpha)^{n}\ldots(1-\alpha)^{m}\alpha^{n}}{y} = \frac{^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\;{}^{(m,n)}Z}{y}$$

oder da $\frac{1}{y}=\alpha$ auch $=$

$$^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\,\alpha\left(\alpha^{m}(1-\alpha)^{n}+(2\alpha)^{m}(1-2\alpha)^{n}\ldots(1-\alpha)^{m}\alpha^{n}\right) = {}^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\;{}^{(m,\,n)}Z\;\alpha.$$

Es sind aber die Werthe α, 2α, 3α, ... $(1-\alpha)$ die veränderlichen Werthe von c, setzen wir diese im Allgemeinen $= x$, so ist in $\alpha^{m}(1-\alpha)^{n}$, $(2\alpha)^{m}(1-2\alpha)^{n}$, ... $(1-\alpha)^{m}\alpha^{n}$ jedes Glied unter der Form $x^{m}(1-x)^{n}$ und wir können $\alpha^{m}(1-\alpha)^{n}+(2\alpha)^{m}(1-2\alpha)^{n}+\ldots+(1-\alpha)^{m}\alpha^{n} = \int x^{m}(1-x)^{n}$ setzen. Wir haben

$$^{m,n}Z = \int x^{m}(1-x)^{n},$$

und die mittlere Wahrscheinlichkeit

$$^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\,\alpha\int x^{m}(1-x)^{n}.$$

Hier durchläuft nun c auf stetige Weise alle Werthe von 0 bis 1, also wird y unendlich groß, $\frac{1}{y}=\alpha$ unendlich klein, und folglich $\alpha = dx$, das Differential von x. Wir haben die mittlere Wahrscheinlichkeit $=$

$$^{m+n}\mathfrak{B}^{n}\int x^{m}dx\,(1-x)^{n}$$

oder $^{(m,n)}Z\,\alpha = \int x^{m}dx\,(1-x)^{n}$.

Dieses nun integrirt gibt

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^{n}}{m+1}+\frac{n\,x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{m+1\,.\,m+2}+\frac{n\,.\,n-1\,x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{m+1\,.\,m+2\,.\,m+3}+\ldots.$$

$$+\frac{n.n-1.n-2\ldots2.1.x^{m+n+1}}{m+1.m+2\ldots m+n+1}+\text{Const.}^{*})$$

Da nun ${}^{m,n}Z\alpha$ für $x=o$ verschwindet, so wird die Constante für das Integral von $x=0$ anfangend auch $=0$, und nehmen wir es ganz von 0 bis 1, so ist es für $x=1$

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots2.1}{m+1.m+2\ldots(m+n+1)}.$$

Das ${}^{m,n}Z\alpha$ wollen wir nun überhaupt mit ${}^{m,n}S_x$ bezeichnen, so daß das ganze Integral von 0 bis $1={}^{(m,n)}S_1$, und das zwischen den Grenzen a und b für $x=$

$${}^{(m,n)}S_b-{}^{(m,n)}S_a \text{ wird.}$$

2) Setzen wir nun diese Werthe in die Formel der Wahrscheinlichkeit für die Erwartung noch eines A in der nächsten Ziehung, so wird

$$\frac{{}^{([m+1],n)}Z}{{}^{(m,n)}Z}=\frac{{}^{([m+1],n)}Z\alpha}{{}^{(m,n)}Z\alpha}=\frac{{}^{([m+1],n]}S_1}{{}^{m,n}S_1}=$$

$$\frac{n.n-1\ldots1}{m+2.m+3\ldots m+n+2}\times\frac{m+1.m+2\ldots m+n+1}{n.n-1\ldots1}$$

$$=\frac{m+1}{m+n+2}.$$

Analog erhalten wir für ein B mehr die Wahrscheinlichkeit $\frac{n+1}{m+n+2}$.

---

*) Das Integral $\int x^m dx(1-x)^n$ wird nämlich theilweis erhalten. Es ist überhaupt $uv=\int udv+\int vdu$, also auch $\int udv=uv-\int vdu$. Nehmen wir nun $\frac{x^{m+1}}{m+1}=v$ und $(1-x)^n=u$, so haben wir $\int udv-\int vdu=\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}-\int\frac{n\,x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx}{m+1}$. Dies letzte Integral nun wieder eben so behandelt, gibt $\frac{n\,x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{m+1.m+2}-\int\frac{n.n-1}{m+1.m+2}.x^{m+2}dx(1-x)^{n-2}$ und so ferner bis nach n mal fortgesetzter theilweiser Integration der Factor $(1-x)^{n-n}=1$ wird und das Integral vollständig werden läßt.

Die Summe dieser beiden muß natürlich die volle Gewißheit enthalten und wir haben $\frac{m+n+2}{m+n+2} = 1$.

Diese Werthe nähern sich, je größer m und n werden, immer mehr den Werthen $\frac{m}{m+n}$ und $\frac{n}{m+n}$, das heißt den Werthen, welche c und f, welche die einfache Wahrscheinlichkeit erhalten würde, wenn m weiße und n schwarze Kugeln im Gefäß wären. Mögen also auch noch so viele Kugeln im Gefäß seyn, wenn die Ziehung einer jeden nur eben so möglich als die einer jeden andern angenommen werden kann, so wird bei fortgesetzten Ziehungen die Wahrscheinlichkeit immer steigen, daß sich die Farbe der Kugeln in demselben Verhältnisse zeigen werde, in dem sie im Gefäß vorhanden sind.

3) Auf ähnliche Weise bestimmt sich allgemein diese Wahrscheinlichkeit in p Ziehungen weiter noch (p—q) mal A, q mal B zu erhalten. Nämlich aus dem vorigen Paragraphen wird

$$ {}^{p}\mathfrak{B}^{q} \times \frac{{}^{[m+p-q,\, n+q]}Z}{{}^{[m,\, n]}Z} = \frac{p \,.\, p-1 \,..\, p-q}{1 \,.\, 2 \ldots q} \; \frac{{}^{[m+p-q,\, n+q]}S_1}{{}^{[m,\, n]}S_1} . $$

Rechnen wir für eine bestimmte Reihenfolge (Variationscomplexion) der Ereignisse, so bleibt der Coefficient weg. Wir haben

$$ \frac{{}^{[m+p-q,\, n+q]}S_1}{{}^{[m,\, n]}S_1} = \frac{n+q \,.\, n+q-1 \ldots 1}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)} \times \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}{n(n-1)\ldots 1} . $$

In diesem Ausdruck hebt der zweite Name die Glieder $1 \ldots (n-1)\, n$ des ersten Zählers auf, es bleibt

$$ \frac{(n+q)(n+q-1)\ldots(n+1) \times (m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)} . $$

Wird darin $n > p - q'$ so kann man auch noch die Factoren $(m + p - q + 1)$ bis $(m + n + 1)$ aufheben; es bleibt

$$\frac{m+1\,.\,m+2\ldots(m+p-p)\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+q)}{(m+n+2)\,(m+n+3)\ldots\ldots(m+n+p+1)}$$

Nun fällt ins Auge, daß wenn m und n wachsen, während p unverändert bleibt, alle mit m und n verbundenen Zahlen immer unbedeutender bleiben, also das Ganze sich immer mehr dem Ausdruck $\frac{m^{p-q}\,n^{q}}{m+n^{p}}$ nähert. Dieser Ausdruck ist aber die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für $p-q$ mal A und q mal B, wenn $c = \frac{m}{m+n}$, $f = \frac{n}{m+n}$ wäre, das heißt, wenn die $m+n$ Ziehungen die Kugeln in dem Verhältniß, wie sie im Gefäß enthalten sind, zeigten.

4) Lassen wir in der letzten Formel q nach und nach von 0 bis p wachsen, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{^{(m+p,\,n)}S_1}{^{(m,\,n)}S_1} + \frac{p}{1}\cdot\frac{^{(m+p-1,\,n+1)}S_1}{^{(m,\,n)}S_1} + \frac{p\,.\,p-1}{1\,.\,2}\,\frac{^{m+p-2,\,n+2}S_1}{^{(m,\,n)}S_1}$$

$$\ldots + \frac{^{[m,\,n+p]}S_1}{^{(m,\,n)}S_1}.$$

Diese tritt hier an die Stelle der Entwicklung von $(e+f)^{p}$; die Summe ihrer Glieder vom ersten bis zum allgemeinen

$$\frac{p\,.\,p-1\ldots p-q+1}{1\,.\,2\ldots p}\,\frac{^{m+p-q,\,n+q]}S_1}{^{(m,\,n)}S_1}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit, daß nicht weniger als $p-q$ mal A und nicht mehr als q mal B erfolgen werden.

5) Theilen wir p proportional dem $m:n$ in $\frac{mp}{m+n}$ und $\frac{np}{m+n}$ so gibt die Summe der Glieder jener Reihe von

$^{(m+\frac{mp}{m+n}+z,\ n+\frac{np}{m+n}-z)}S_1$ bis auf

$^{(m+\frac{mp}{m+n}-z,\ n+\frac{nq}{m+n}+z)}S_1$ die Wahrscheinlichkeit, daß in

p Ziehungen die Zahl der A bis auf die Grenze z dem m proportional bleiben werde.

6) Sollte sich nur eine Reihenfolge von gleichartigen Ereignissen gezeigt haben, so würde $n = o$, ${}^{m}S_1 = \frac{1}{m+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit der gleichförmigen Fortsetzung dieser Ereignisse noch um einmal wird $\frac{{}^{m+1}S_1}{{}^{m}S_1} = \frac{m+1}{m+2}$, welche bald der Gewißheit sehr nahe rückt. Für p mal A weiter aber ist in 3) sowohl $n = o$, als $q = o$, daher erhalten wir

$$\frac{{}^{(m+p)}S_1}{{}^{m}S_1} = \frac{m+1}{m+p+1},$$

welches immer um so unsicherer wird, in je größeres Verhältniß p gegen m kommt, und verschwindet, wenn m gegen p verschwindet.

§. 19.

1) Setzen wir, wie im vorigen Paragraphen, alle Werthe der Wahrscheinlichkeit von 0 bis 1 als gleichmöglich voraus, so wird die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Hypothese $c = x$ durch $\frac{x^m (1-x)^n}{{}^{(m,\,n)}Z} = \frac{\alpha \,.\, x^m (1-x)^n}{{}^{(m,\,n)}S_1} = \frac{x^m (1-x)^n}{y \,.\, {}^{m,\,n}S_1}$ gemessen. Dieser Werth ist begreiflich für die einzelne Hypothese unendlich klein, da aber der Nenner $y \,.\, {}^{[m,\,n]}S_1$ für alle derselbe bleibt, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Voraussetzungen unter einander wie die Zähler, das heißt wie die Werthe von $x^m (1-x)^n$ in jeder Voraussetzung.

Die wahrscheinlichste unter allen diesen Voraussetzungen wird also die seyn, für welche $x^m (1-x)^n$ ein Größtes wird. Setzen wir daher das Differential $d\left(x^m (1-x)^n\right) = o$, so wird sich daraus der Werth von x bestimmen, welcher diesem Größten entspricht. Wir haben $d \,.\, x^m (1-x)^n = m x^{m-1}$

$dx\,(1-x)^n - n\,x^m\,dx\,(1-x)^{n-1}$. Also $m\,(1-x) = n\,x$, $x = \frac{m}{m+n}$, $(1-x) = \frac{n}{m+n}$.

Es ist also überhaupt immer die wahrscheinlichste unter allen Voraussetzungen diejenige, daß das beobachtete Verhältniß der Ereignisse ihrer einfachen Wahrscheinlichkeit proportional sei.

2) Es läßt sich aber ferner auch noch zeigen, daß diese Voraussetzung mit der steigenden Zahl der Beobachtungen über jede Grenze hinaus sich der wirklich geltenden Wahrscheinlichkeit nähere. Wenn man nämlich die Zahl der Beobachtungen gehörig vermehrt, so kann man die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth von x zwischen den Grenzen $\frac{m}{m+n} + k$ und $\frac{m}{m+n} - k$ liege, wie klein auch k genommen wird, doch der Einheit so nahe bringen als man will.

Der Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit wird erhalten, wenn man das Integral $\int x^m\,dx\,(1-x)^n$ zwischen den Grenzen $\frac{m}{m+n} + k$ und $\frac{m}{m+n} - k$ nimmt und mit ${}^{(m,\,n)}S_1$ dividirt. Setzen wir $\frac{m}{m+n} + k = b$, $\frac{m}{m+n} - k = a$, so ist es also $\frac{{}^{(m,\,n)}S_b - {}^{(m,\,n)}S_a}{{}^{(m,\,n)}S_1}$.

Soll daraus unser Satz nachgewiesen werden, so müssen wir uns allgemeine Näherungswerthe für diesen Ausdruck suchen.

Wir setzen dafür $m+n=r$, $x = \frac{m}{r} + z$, $1 - x = \frac{n}{r} - z$; so daß $-k$ und $+k$ die Grenzen für z werden. Demnach ist

$$\int x^m\,dx\,(1-x)^n = \int dz \left(\frac{m}{r} + z\right)^m \left(\frac{n}{r} - z\right)^n.$$

Geben wir diesem die Form

$$\frac{m^m n^n}{r^r} \int dz \left(1+\frac{rz}{m}\right)^m \left(1-\frac{rz}{n}\right)^n$$

und stellen die letzten Ausdrücke als Exponentialgröße dar, so wird

$$\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m = e^{m \log. \left(1+\frac{rz}{m}\right)} = e^{rz - \frac{r^2 z^2}{2m} + \frac{r^3 z^3}{3m^2} - \dots}$$

$$\left(1-\frac{rz}{m}\right)^n = e^{n \log. \left(1-\frac{rz}{n}\right)} = e^{-rz - \frac{r^2 z^2}{2n} - \frac{r^3 z^3}{3n^2} - \dots}$$

so daß das Integral wird

$$\int dz\, e^{-\frac{r^3 z^2}{2mn} - \frac{r^4 z^3 (m-n)}{3m^2 n^2} - \dots}$$

Vernachlässigen wir die Glieder, welche z^3 enthalten und die folgenden, so können wir dies also setzen

$$\int dz\, e^{-\frac{r^3 z^2}{2mn}};$$

setzen wir darin $\frac{r^3 z^2}{2mn} = t^2$, $z = t\sqrt{\frac{2mn}{r^3}}$, so ergibt sich

$$\sqrt{\frac{2mn}{r^3}} \int e^{-t^2} dt,$$

und die Grenzen für z, $-k$ und $+k$ werden für $t = -k\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$ und $+k\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$. Da aber die Function e^{-t^2} für $\pm t$ dieselbe bleibt, so haben wir nur den Werth von $t = 0$ bis $t = k\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$ zu suchen und doppelt zu nehmen. So ist also

$$\int x^m dx (1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^r}\, 2\sqrt{\frac{2mn}{r^3}} \int e^{-t^2} dt.$$

Dies sollen wir nun durch ${}^{(m,\,n)}S_1$ dividiren.

Es war aber ${}^{(m,\,n)}S_1 = \frac{m!\; n!}{(m+n+1)\;(m+n)!} = \frac{\sqrt{2\pi}}{m+n+1}$.

$$\frac{m^{m+1/2}\,n^{n+1/2}\,e^{m+n}}{e^m\,e^n\,(m+n)^{m+n+1/2}} \times e^{1/12\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)}$$: oder wenn wir die Exponentialgröße vernachlässigen

$$= \sqrt{\frac{2\pi m n}{m+n}} \cdot \frac{m^m\,n^n}{(m+n)^{m+n}\,.\,(m+n+1)}$$ und wenn wir für sehr große Werthe von m und n anstatt $m+n+1$ nur $m+n$ setzen

$$= \frac{m^m\,n^n}{r^r}\sqrt{\frac{2\pi m n}{r^3}}.$$

Dies gibt also näherungsweis die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen den angegebenen Grenzen

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt.$$

Oder wenn wir $\sqrt{\frac{r^3}{2mn}} = h$ setzen, so haben wir

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-k}^{+k} e^{-h^2 z^2} dz$$

als Werth der Wahrscheinlichkeit, daß z zwischen die Grenzen $+k$, $-k$ falle.

Nun ist $\int e^{-t^2} dt$ zwischen den Grenzen $t = o$ und $t = \infty$ genommen, wie wir gleich zeigen wollen, gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, da aber e^{-t^2} sehr schnell abnimmt, sobald t irgend größere Werthe bekommt, so nähert sich das Integral dieser Größe sehr schnell, und für hinlänglich große Werthe von t kann folglich $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ $\int e^{-t^2} dt$ der Einheit so nahe gebracht werden, als man will.

Für diesen Zweck muß t möglichst groß genommen werden. Aber in $t = k\sqrt{\frac{r^3}{2mn}} = k\sqrt{r}\sqrt{\frac{r^2}{2mn}}$ ist der kleinste Werth von $\frac{r^2}{2mn}$ für $m = n$ gleich 2, es kommt

also darauf an, k so viel möglich größer als $\frac{1}{\sqrt{r}}$ zu nehmen. Auf der andern Seite ließen wir aber in $\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m$ das Glied $\frac{r^3 z^3}{3 m^2}$ weg. Soll nun dieses sehr klein werden, so hängt dies vom Werth von $r z^3$ ab, denn $\frac{r^3}{3 m^2}$ kann nie unter $1/_3$ fallen. Daher muß z oder $k < \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ seyn, um $k<1$ zu erhalten. Also durch Werthe von k zwischen $\frac{1}{\sqrt{r}}$ und $\frac{1}{\sqrt[3]{r}}$, welche, je größer r wird, immer um so kleiner ausfallen und näher zusammenrücken, läßt sich unser Integral der Einheit immer näher bringen.

Die Wahrscheinlichkeit, durch hinlänglich fortgesetzte Beobachtungen die richtigen Verhältnisse gefunden zu haben, bestimmt sich uns also durch das Integral $\int e^{-t^2} dt$, welches wir näher betrachten müssen.

Es ist bekanntlich

$$u = \int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2r-1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2r} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$v = \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2r}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots 2r+1}$$

$$uv = \frac{1}{2r+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ist nun darin r unendlich groß, so verschwindet die 1 neben ihm und wir haben

$$r\left(\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,;\ \sqrt{r} \int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\, 1/_2 \sqrt{\pi}.$$

Für $r = \infty$ ist aber $\left(1 - \frac{t^2}{r}\right)^r =$

$$1 - t^2 + \frac{t^4}{1\,.\,2} - \frac{t^6}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{t^8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots = e^{-t^2}$$

Setzt man nun $1 - \frac{t^2}{r} = x^2$, so wird für $r = \infty$

$x^{2r} = e^{-t^2}$ und $- dt = \pm \frac{\sqrt{r}\,x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ so daß $e^{-t^2} dt = x^{2r} . \frac{\sqrt{r}\,x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \sqrt{r}\;\frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Also $\int e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ für t zwischen o und ∞, welches x zwischen 1 und 0 entspricht. Folglich

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

und da $\int_0^{\delta} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{\delta}^{\infty} e^{-t^2} dt$

auch $\int_0^{\delta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_{\delta}^{\infty} e^{-t^2} dt.$

Suchen wir nun genauer dieses Integral zwischen bestimmten Grenzen, so können wir 1., e^{-t^2} in eine Reihe entwickeln und erhalten

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{1}{1} . \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1\,.\,2} . \frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} . \frac{t^7}{7} + \ldots$$

diese Reihe verschwindet für $t = 0$, gibt also zwischen $t = o$ und $t = \delta$

$$\int e^{-t^2} dt = \delta - \frac{1}{1} . \frac{\delta^3}{3} + \frac{1}{1\,.\,2} . \frac{\delta^5}{5} - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} . \frac{\delta^7}{7} + \ldots$$

in einer Reihe, welche für kleine Werthe von δ schnell convergirt.

2) Für theilweise Integration haben wir

$$\int \frac{e^{-t^2} dt}{t^{2\alpha}} = - \frac{e^{-t^2}}{t^{2\alpha+1}} - \frac{2\alpha+1}{2} \int \frac{e^{-t} dt}{t^{2\alpha+2}}.$$

Die successive Anwendung dieser Formel gibt

$$\int e^{-t^2} dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{2^2 t^4} - \frac{1.3.5}{2^3 t^6} + \ldots\right)$$

Diese Reihe verschwindet für $t = \infty$ und gibt zwischen $t = \infty$ und $t = \delta$

$$\int e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\delta^2}}{2\delta}\left(1 - \frac{1}{2\delta^2} + \frac{1.3}{2^2 \delta^4} - \frac{1.3.5}{2^3 \delta^6} + \ldots\right).$$

Eine Reihe, welche für große Werthe von δ bis an eine gewisse Grenze schnell convergirt.

Mit diesen Hülfsmitteln hat Kramp die Werthe dieses Integrals und seiner Logarithmen berechnet. Analyse des refractions astronomiques. Leips. 1798. p. 193 — 210. Uns betrifft aber näher das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t} dt$ von $t = o$ bis $t = \infty$. Dieses berechnete Gauß von $\Theta t = \frac{1}{2}$ bis $\Theta \infty = 1$, wie folgt, indem wir $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt = \Theta t$ setzen.

$0{,}5000\,000 = \Theta\ 0{,}4769363 = \Theta\ \rho$
$0{,}6000\,000 = \Theta\ 0{,}5951161 = \Theta\ 1{,}247790\,\rho$
$0{,}7000\,000 = \Theta\ 0{,}7328691 = \Theta\ 1{,}536618\,\rho$
$0{,}8000\,000 = \Theta\ 0{,}9061939 = \Theta\ 1{,}900032\,\rho$
$0{,}8427\,008 = \Theta\ 1 = \Theta\ 2{,}096716\,\rho$
$0{,}9000\,000 = \Theta\ 1{,}1630872 = \Theta\ 2{,}438664\,\rho$
$0{,}9900\,000 = \Theta\ 1{,}8213864 = \Theta\ 3{,}818930\,\rho$
$0{,}9990\,000 = \Theta\ 2{,}3276754 = \Theta\ 4{,}880475\,\rho$
$0{,}9999\,000 = \Theta\ 2{,}7510654 = \Theta\ 5{,}768204\,\rho$
$1 = \Theta\ \infty = \Theta\ \infty$.*)

Dieser Verlauf der Werthe der Function läßt leicht bemerken, wie sie für etwas größere Werthe von t rasch der Grenze 1 für $t = \infty$ entgegen gehen, also anstatt nur etwas weiterer Grenzen gleich $+ \infty$ und $- \infty$ als Grenze vorausgesetzt werden dürfe.

3) Diese Formeln setzen alle voraus, daß die zu berech-

*) Vollständiger steht diese Tafel im Berliner astronom. Jahrbuch 1834 am Ende.

nende Sphäre eine constante Zahl gleichmöglicher Fälle habe. Die Sache wird noch verwickelter, wenn diese Zahl und somit die einfachen Wahrscheinlichkeiten selbst veränderlich werden. Auch dies läßt sich auf vielerlei Art in Rechnung nehmen, wenn sich ein Gesetz dieser Veränderungen, etwa, daß sie der Zeit proportional seyen, vermuthen läßt. So folgte Condorcet*) der Sache weiter in sehr verwickelten Rechnungen, welche aber wegen der allzugroßen Unbestimmtheit der Voraussetzungen doch keine brauchbare Anwendung finden. Und jetzt hat Poisson in seinem großen Werke dem Lehrsatz des Jakob Bernoulli hier 2) mit seiner feinen und behenden Analysis die volle Allgemeinheit gegeben: bei allen wechselnden Ereignissen der Natur und im Menschenleben werden sich, wenn die Beobachtungen nur lange genug fortgesetzt und weit genug ausgebreitet werden, immer mittlere constante Verhältnißzahlen der einfachen Wahrscheinlichkeiten ergeben, sobald nur die Veränderungen der zusammenwirkenden Ursachen in kleinern oder größeren Schwingungen periodisch erfolgen und nicht in bestimmten Richtungen fortschreitend das System der einfachen Wahrscheinlichkeiten ändern. Da es mir hier aber nur um die Kritik der Principien zu thun ist, habe ich diesen Rechnungen nicht weiter zu folgen.

---

* Essai sur la probabilité des décisions. 3me partie.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf politische Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Anwendung der Wahrscheinlichkeit a priori auf die Theorie der Glücksspiele.

§. 20.

Die einfachste und vollständigste Anwendung der Gesetze der Wahrscheinlichkeit a priori findet sich bei der Beurtheilung, der Einrichtung und des Verlaufes der Glücksspiele, weil hier die Zahl und Ordnung der gleichmöglichen Fälle willkührlich vorausbestimmt wird und der Zufall nur innerhalb der Schranken dieser gegebenen Gesetze waltet.

Diese Theorie beruht auf drei Gesetzen.

1) Die billige Anordnung des Spiels beruht auf der Gleichheit der mathematischen Hoffnung für jeden der Mitspielenden.

2) Wenn das Spiel mit gleicher mathematischer Hoffnung geordnet ist, so wird es, je länger man unter derselben Anordnung fortspielt, immer um so wahrscheinlicher, daß im Durchschnitt keiner der Spielenden gewinnen und keiner verlieren werde. Dies ist eigentlich logisch bestimmt schon durch den Begriff der gleichmöglichen Fälle. Aber daneben wird, nach den Gesetzen der Combination, wahrscheinlich, daß, je länger das Spiel fortläuft, bald der eine, bald der andere der Spielenden periodisch in immer größeren Verlust und da-

gegen Gewinn bleiben werde, jedoch so, daß diese verlorenen und gewonnenen Summen einen immer kleineren Theil des ganzen Einsatzes betragen werden, je länger man fortspielt.

Dies ist aber nur eine Durchschnittsrechnung für das zukünftige Spiel. Die günstige oder ungünstige Vergangenheit hat hingegen gar keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Spieles, sondern der vorübergegangene Zufall liegt für sich fest, und die Wahrscheinlichkeit bleibt bei jedem neuen Spiel dieselbe, wie von Anfang an. Es findet z. B. keine Wahrscheinlichkeit statt, daß ein wirklich erlittener Verlust sich durch weiteres Fortspielen wieder ausgleichen werde.

3) Wenn aber die mathematische Hoffnung der einen Partei nur irgend größer ist, als die der andern, so steht eine überwiegende Wahrscheinlichkeit fest, daß im Durchschnitt die Partei fortgehend gewinnen werde, welche die größere Hoffnung für sich hat. Ist dann das Uebergewicht nicht gar zu groß, so wird sich dieses Gewinnen dahinter verstecken, daß, je länger man fortspielt, periodisch doch auch zu Zeiten diese Partei bedeutender Verlust trifft, der aber im Ganzen wieder aufgehoben wird, wenn der Spielende einen hinlänglich hohen Einsatz in seiner Gewalt hat.

Diese letzte Regel ist eigentlich bei der Beurtheilung der Spiele in der Gesellschaft von der besten Anwendung, denn sonst liegen die Lebensprincipien der Glücksspiele nicht in diesen mathematischen Regeln, sondern nur theils im Kampf mit der Langeweile, theils in der trägen Gewinnsucht, die gern gewinnen will, ohne zu arbeiten.

Die besser geordneten Gesellschaftsspiele dienen nur einem geschmacklosen Kampfe gegen die Langeweile. Sie werden nach gleicher mathematischer Hoffnung geordnet, aber da bei ihrer Handhabung einige Kunst der Umsicht und Vorsicht angewendet werden kann, so werden nach der dritten Regel diejenigen, die diese Kunst verstehen, im Durchschnitt ihren guten Freunden mit Maaße das Geld aus der Tasche ziehen.

Bei der Weise hingegen, wie man im Großen die bloßen Glücksspiele zu ordnen pflegt, wird das dritte Gesetz auf

eine andere Art benutzt. Bei unsern Classenlotterieen wird meist unter dem Vorwand, einer milden Stiftung aufzuhelfen, der schlechte Schacher mit Lotterieloosen hergestellt; an den Spielbänken hingegen, welche zwischen die schönen Heilanstalten an den Heilquellen ihre geputzten Tische stellen, um den Fremden Gelegenheit zu geben, ihre Gesundheit und vorzüglich ihr Vermögen wieder zu zerrütten, überlisten pfiffige Speculanten die gelangweilten Reichen und das unbesonnene, habgierige Volk.

Bei diesen bloßen Glücksspielen tritt nämlich immer ein Unternehmer einer unsichern großen Gesellschaft gegenüber, gibt den mit ihm Spielenden unter sich, wenn er ehrlich spielt, wohl gleiche mathematische Hoffnung; aber sich behält er eine hinlänglich größere mathematische Hoffnung bevor, so weit, daß er hoffen kann, sicher im Gewinn zu bleiben, und also die Gesellschaft ihm gegenüber im Ganzen immer zu überlisten. Dies erhalten die Classenlotterieen schon immer durch die bedeutenden Abzüge von den größern Gewinnen, die Spielbänke aber durch die Einrichtung des Spiels, wie z. B. im Faro das plié (refait) und die letzte Karte die Bank sichern.

Sehen wir diese Spielunternehmungen wie ein Gewerbe an, so muß man die Unternehmer dafür, daß sie sich so bedeutende Vortheile vorbehalten, damit vertheidigen, daß sie sich ja immer einem großen, oft nicht zu berechnenden Zufall darin preisgeben, wie zahlreich, wie reich und in welcher Ordnung ihnen die Spieler entgegentreten werden.

Indessen decken ihnen auf der andern Seite auch die natürlich vorherrschenden Gewohnheiten der Spieler wieder den Schaden.

Spielen nämlich die Spieler fortgehend ruhig mit mäßigem Einsatz, so sind sie der Bank angenehm, denn diese wird im Durchschnitt gewinnen, was die Berechnung der mathematischen Hoffnung ihr verspricht, und die Spieler beuten nur einander aus, wie jedesmal der Zufall es will.

Spielen aber die Spieler im Unglück mit erhöhtem Ein-

satz, und dies unruhig leidenschaftlich, so sind sie die Lieblinge der Bank, denn diese gehen im Durchschnitt mit erhitztem Kopf und leerer Tasche davon.

Wird aber dieses Spiel (à la martingal) ruhig und gleichmäßig getrieben, so giebt es in der Regel dem viel wagenden Spieler einen kleinen Gewinn; er wird der Bank langweilig, bis einmal der Tag seines Unglücks kommt und ihm die ganze Casse sprengt.

Die ganze Gesellschaft der Pontes zusammen bleibt also in der Regel immer im Verlust, daher bedarf eine jede solche Bankunternehmung noch einen besondern Köder, durch den sie die Leute verlockt, bei ihr ihr Geld zu wagen. Dieser wird auf mancherlei Art bereitet. Die Hauptsache ist, daß große Gewinne vorgespiegelt werden, denn dadurch werden reiche Leute von verbildetem Geschmack verleitet, die Mittel, mit denen so viel Edles ausgeführt werden könnte, für das lächerliche Vergnügen einer nächtlichen Erhitzung, durch den Wechsel von Furcht und Hoffnung, ihr Geld zu verschleudern; dadurch werden auch solche, die nichts Ueberflüssiges besitzen, unklug verleitet, ihr Vermögen der arbeitscheuen Habgier zum Opfer zu bringen, oder auch mit dem Schicksal, welches ihnen kein hinlänglich einträgliches Gewerbe gewährte, auf Leben und Tod, ein verzweifeltes Spiel zu spielen.

Vorzüglichen Vortheil gewährt der Bank dann noch, wenn der Spielende gegen einen sehr kleinen Einsatz eine entfernte Hoffnung erhält, sehr viel zu gewinnen. Dadurch wird nicht nur die träge Habsucht um so leichter angelockt, sondern es werden auch neben dem Schwarme der spielsüchtigen Thoren andere Leute angezogen, welche gegen kleine Ausgaben sich fortwährend das Vergnügen verschaffen, mit den Phantasien zu spielen, wie schön es doch sein werde, und was sie nicht alles unternehmen wollten, wenn sie plötzlich einmal recht reich würden.

Aber wer so spielt, wird leicht im Glück den Einsatz erhöhen, und dann wird im Durchschnitt wieder das hohe

Spiel enden, wenn das Geld wieder in die Bank zurückgeflossen ist.

Ein Kenner *) behauptet zwar, daß die Bank durch die Leidenschaftlichkeit der Spieler nicht gewinne. Dabei scheint mir aber der mathematischen Theorie zu viel vertraut. Wer für sein Vermögen zu hoch spielt, der wird leicht aus Vorsicht oder Noth sein Spiel grade dann beendigen müssen, wenn er viel verloren hat. Dies Zurücktreten der einzelnen Spieler liegt nicht mit in der Rechnung.

Von den Regeln beim Wetten und von der mathematischen Hoffnung.

§. 21.

Die Einrichtung und die Gesetze des Verlaufes der Glücksspiele geben nun von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit a priori die mannigfaltigsten Anwendungen, aber diese Lehren gehören ganz der Combinationslehre und sind nicht von mir beabsichtigt. Mir kommt es nur auf die ersten Grundsätze und Grundbegriffe an, und dafür sind nur die oben aufgeführten drei Gesetze zu beweisen und zu erläutern.

Die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Menschenleben und seine Geschäfte beziehen sich größtentheils auf die Bestimmung irgend eines zu erwartenden Gewinnes, und brauchen daher Vorbegriffe, welche an den Verhältnissen von Einsatz und Gewinn bei Spielen am leichtesten deutlich gemacht werden. Dies führt zuerst auf den Grundsatz, nach welchem die Billigkeit, das Gleichgewicht, das pari einer Wette beurtheilt werden muß.

Bei dem Spiel mit einem gewöhnlichen Würfel ist das einfachste, wenn sechs Spieler zusammentreten, deren jeder auf eine Seite des Würfels wettet, denn hier hat jeder die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/6$ zu gewinnen. Wenn sie also um einen Einsatz spielen, den sie erst für das Spiel zusammenlegen, so fordert die Billigkeit, daß jeder gleich viel gebe, und jeder hat

*) Vierteljahrschrift, April bis Juni 1840, S. 221.

die Wahrscheinlichkeit $1/6$, fünf zu gewinnen. Treten nun aber nur zwei zusammen, von denen der Eine auf zwei Seiten, der Andere auf vier Seiten wettet, so übernimmt der erste die Sache von zwei, der andere die von vier der vorigen. Der erste hat die Wahrscheinlichkeit $2/6$, der zweite die Wahrscheinlichkeit $4/6$ zu gewinnen, und der erste muß zwei, der andere vier einsetzen, so daß der erste die Wahrscheinlichkeit $2/6$ hat vier zu gewinnen, der andere die Wahrscheinlichkeit $4/6$ zwei zu gewinnen.

Im Allgemeinen, wenn wir bei einem Spiel die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle kennen und wissen, wie viele davon für jeden Spieler günstig sind: so fordert die billige Wette, daß jeder Wettende eine Summe einsetze, welche der Anzahl der ihm günstigen Fälle proportionirt ist. Wird dies ausgeführt, so wird jedesmal das Product der Wahrscheinlichkeit, welche ein Spieler für sich hat, in die Größe des Gewinnes, den er zu hoffen hat, für jeden das Gleiche sein.

Es spielen z. B. drei Spieler mit einander, A hat m, B hat n, C hat r Fälle für sich. Da nun einer gewinnen soll, so haben wir, wenn e, f, g ihre Wahrscheinlichkeiten sind

$$e = \frac{m}{m+n+r},\ f = \frac{n}{m+n+r},\ g = \frac{r}{m+n+r},$$ und

$e + f + g = 1$. Sind ferner a, b, c ihre Einsätze, so fordert die billige Wette, daß $a : b : c = e : f : g$ folglich haben wir $af = be$; $ag = ce$; $bg = cf$; $a(f+g) = (b+c)\,e$ u. s. w.

Dieses Product der Wahrscheinlichkeit für einen Jeden in den für ihn zu hoffenden Gewinn, nennen wir nun seine mathematische Hoffnung, und die billige Wette fordert also gleiche mathematische Hoffnung für jeden der Spielenden.

Hieraus folgt zugleich, daß der Einsatz jedes Spielers seiner mathematischen Hoffnung auf die ganze im Spiele stehende Summe gleich seyn muß. Denn da $a\,(f+g) = (b+c)$ e so haben wir $(a+b+c)\,e = ae + (b+c)\,e = ae + a$ $(f+g) = a\,(e+f+g) = a$, da $e + f + g = 1$.

Man kann also jedes Spiel so ansehen, daß der Spieler

seinen Einsatz an das Spiel abgiebt, und dafür die mathematische Hoffnung kauft, den ganzen Einsatz zu gewinnen.

Nach diesem Gesetz entscheidet die sogenannte **Theilungsregel**, welche angeben soll, wie sich die Spieler in den Einsatz zu theilen haben, wenn eine Partie zwar angefangen worden, aber die Spieler sich trennen, ehe sie beendigt worden.

In einfachen Fällen giebt dies eine leichte Rechnung. Wettet Jemand, mit einem gewöhnlichen Würfel nach einander zweimal dieselbe vorausbestimmte Zahl zu werfen, so hat er die Wahrscheinlichkeit $1/_{36}$ für und $^{35}/_{36}$ gegen sich, er hat 1 und der Gegner 35 einzusetzen. Ist ihm nun der erste Wurf gelungen, und die Spieler wollen sich nun trennen, so sind die Verhältnisse so geändert, daß er gegen einen Fall für sich nur noch fünf gegen sich hat; er muß also $1/_6$ des Ganzen empfangen und der Gegner bekommt nur $^5/_6$ zurück.

Aufgaben dieser Art haben in der Unterhaltung zwischen **Pascal** und einem **Chevalier de Méré** die ersten Versuche zur Wahrscheinlichkeitsrechnung veranlaßt. Eine einfache Frage der Art ist: Zwei Spieler legen einen Einsatz unter der Bedingung zusammen, daß er demjenigen gehören solle, der zuerst drei Partien gewonnen haben wird; sie trennen sich, nachdem der erste zwei und der andere eine Partie gewonnen hat. Wie haben sie nun den Einsatz unter einander zu theilen, wenn sie so spielen, daß jeder die Wahrscheinlichkeit $1/_2$ hat, eine Partie zu gewinnen.

Der fernere Verlauf des Spiels wäre hier sehr einfach; gewinnt nämlich der erste die nächste Partie, so ist das Spiel für ihn beendigt, und dafür hat er die Wahrscheinlichkeit $1/_2$. Hätte er sie aber nicht gewonnen, so hat jeder Spieler 2 Partien, und die folgende entscheidet das Spiel. Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit $1/_2$, daß diese Partie noch gespielt werden wird, und dafür haben beide gleiche Hoffnung, also jeder die Wahrscheinlichkeit $1/_4$. Der erste Spieler hat also die Wahrscheinlichkeit $1/_2 + 1/_4 = {}^3/_4$ und der andere $1/_4$; folglich bekommt der erste $^3/_4$, der andere $1/_4$ des Einsatzes.

Diese Trennung der Spieler vor Beendung des Spiels

kann leicht bei solchen Spielen vorkommen, die ins Unbestimmte unbeendet bleiben können. Eine einfache Art solcher Spiele ist die, bei denen man die Bedingung des Gewinns dahin setzt, daß der eine Spieler eine bestimmte Anzahl Partien mehr gewonnen haben soll, als der andere, wenn die Partien en rabattant gespielt werden.

Dies Spiel ist leicht zu übersehen, wenn nur zwei Spieler spielen und der Ueberschuß der Partien, wodurch gewonnen wird, nur 2 beträgt. Beim ersten Spiel gewinnt einer von beiden; dieser hat nun die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auch noch das zweite Spiel zu gewinnen, gewinnt er dies aber nicht, so stehen die Spieler wieder wie beim Anfang des Spiels. Bei jedem graden Spiel ist also entweder die Partie beendigt oder wieder wie anfangs gestellt, bei jedem ungraden hat der eine ein Spiel voraus. Wollen sie sich also jetzt trennen, so hat der, der das letzte Spiel gewann, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auch das zweite zu gewinnen, gewinnt er dies aber nicht, so stehen beide Spieler wieder gleich, jeder mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Der zuletzt Gewinnende hat also erstens die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für sich, und dann von dem andern Fall noch die Hälfte, er hat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ und sein Gegner nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Der erste bekömmt also wieder $\frac{3}{4}$, der andere $\frac{1}{4}$ des Einsatzes.

Dieses Spiel kann nur bei einem graden Spiel und bei jedem graden beendigt werden, und dafür bleibt jedesmal für das folgende grade Spiel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Sollte also hier gewettet werden, daß die Partie nicht über eine bestimmte Anzahl Spiele dauern werde, so ist die Wahrscheinlichkeit der Beendigung mit dem zweiten Spiel $\frac{1}{2}$, also bis zum vierten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, bis zum sechsten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ und sofort nach der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß gerade dies bestimmte Spiel beendigen werde, ist für das vierte $\frac{1}{4}$, für das sechste $\frac{1}{8}$ u. s. w.

Bleiben wir nun bei zwei Spielern, von denen jeder bei jedem Spiele die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ hat, setzen aber allgemeiner den geforderten Ueberschuß gewonnener Spiele zur

Beendigung der Partie = m, so ist leicht ersichtlich, daß die combinatorische Handlung zur Aufstellung der Tabelle aller möglichen Fälle für die Reihenfolge der Spiele Variation mit Wiederholungen für die Elemente A, B sei, und also an den Potenzen des Binomium (a + b) bis zum r ten Spiel, also bis $(a + b)^r$ abgenommen werden könne. Die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ereignisses im r'ten Spiel bleibt also $(\frac{1}{2})^r$. Ferner zuerst kommen im m ten Spiele die zwei Fälle a^m, b^m vor, welche das Spiel beenden können; dabei bleibt der höchste Ueberschuß der A über B, oder umgekehrt in den übrigen Complexionen für das m te Spiel = m — 2, denn die Zahl der Buchstaben in jedem ist = m, und also an der Stelle wenigstens eines A ein B, oder eines B ein A. Folglich können nur nach einer Anzahl von Spielen, die um eine grade Zahl größer ist, als m, wieder Beendigungen des Spieles vorkommen. Fragen wir nun, wie viele das Spiel beendigende Fälle überhaupt möglich sind, so haben wir dies nach $(a + b)^{m+2n}$ zu ermessen, wobei n nach und nach den Werth aller ganzen Zahlen bekommt.

Da aber bei der Fortsetzung der Tabelle alle die Complexionen wegfallen müssen, in denen ein Ueberschuß von m und also auch noch mehrerer A über B oder umgekehrt vorkommt, so kommen wir für jeden Werth von n erstens nur an die zwei Glieder $a^{m+n}b^{n}$ und $a^{n}b^{m+n}$, in denen der Ueberschuß grade m beträgt, allein den Coefficienten dieses Gliedes müssen wir stets vermindern, um die Complexionen, welche aus solchen entstanden sind, in denen die Differenz früher schon = m war. Daher muß man die Rechnung jedesmal im Besondern ausführen, indem man aus $(a + b)^m$ erstens a^m und b^m als die zwei ersten beendenden Fälle wegläßt, dann die m — 1 übrigen Glieder der Potenz mit $(a + b)^2$ multiplicirt, wobei das erste Glied $a^{m-1}b$ mit a^2, das letzte $a\,b^{m-1}$

mit b^2 multiplicirt, hier die beendenden Fälle zeigt und also nachher wegfällt u. s. f. Sei z. B. $m = 3$, so haben wir in

$$a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3$$

erstens in a^3 und b^3 zwei beendende Fälle, wir lassen diese weg und multipliciren

$$3\,a^2\,b + 3\,ab^2$$

mit $(a + b)^2$, so erhalten wir nun $3\,a^4\,b$ und $3\,ab^4$ als beendende Fälle, es bleiben übrig

$$9\,a^3\,b^2 + 9\,a^2\,b^3$$

diese mit $(a + b)^2$ multiplicirt, geben $9\,a^5\,b^2$ und $9a^2\,b^5$ als beendende Fälle, es bleiben

$$27\,a^4\,b^3 + 27\,a^3\,b^4$$

mit $(a + b)^2$ zu multipliciren u. s. f. Man sieht dabei leicht, daß der neue Coefficient der beendenden Fälle 3 mal der nächstvorhergehende wird.

Verbinden wir nun die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Ereignisses bei jedem r ten Spiel mit dieser Zahl der beendenden Fälle, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß die Partie enden werde grade mit dem dritten Spiel $^2/_8 = {}^1/_4$, mit dem 5ten $= {}^3/_{16}$, mit dem 7ten $= {}^9/_{64}$; mit dem 9ten $^{27}/_{256}$; mit dem 11ten $^{81}/_{1024}$ u. s. f. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß sie enden werde bis zum dritten Spiel $= {}^1/_4$, bis zum 5ten $= {}^1/_4 + {}^3/_{16}$; bis zum 7ten $= {}^1/_4 + {}^3/_{16} + {}^9/_{64}$ u. s. f., bis die Summe der ganzen Reihe ohne Ende $= 1$.

Auf gleiche Weise führen wir die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten auch aus für höhere Werthe von m. Sei zum Beispiel $m = 5$, so giebt es zuerst zwei Fälle der Beendigung mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_{32}$ für a^5, b^5 in

$$a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

und wir multipliciren die vier mittleren Glieder wieder successive mit $(a + b)^2$, so erhalten wir hier die Wahrscheinlichkeit der Beendigung der Partie grade mit dem Spiele 5, 7, 11, 13, 15, 17 nach der Reihe $^1/_{16}$, $^5/_{64}$, $^{20}/_{256}$, $^{75}/_{1024}$, $^{275}/_{4096}$, $^{1000}/_{16384}$, und die Wahrscheinlichkeit der Beendigung der Par-

tie bis an das sovielte Spiel mit der successiven Summe dieser Brüche.

Wollen wir auch die Theilungsregel für diese Fälle ausführen, so wird die Rechnung nach und nach verwickelter. Soll z. B. die Partie durch drei Spiele voraus gewonnen werden, so sind die Wechselfälle vor dem Gewinn immer nur drei: entweder steht das Spiel, wie vor dem Anfang, jeder hat gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, oder der eine hat eine, oder der eine hat zwei Partien voraus.

1) Nun habe A zwei Partien voraus, so bringt das nächste Spiel ihm den Gewinn der Partie mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$, oder läßt ihm nur einen Ueberschuß 1 A, ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$.

2) Gewinnt er im zweiten Fall das zweite Spiel, wofür die Wahrscheinlichkeit $1/4$, so steht dann das Spiel wieder, wie vor zwei Spielen.

3) Verliert er aber auch dieses Spiel, so stehen beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/4$, wie vor dem Anfang.

A hat also hier die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen nach 1) und 2)

$$1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots.$$

und dazu nach 3)

$$1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots$$

Also zusammen $1/2 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots = 5/6$; B hingegen nur nach 3)

$$1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots = 1/6.$$

Also soll bei der Theilung A $5/6$, B $1/6$ des Einsatzes erhalten.

Hätte aber A nur eine Partie vorausgehabt, so würde der Gewinn nach 1) ihm erst zwei Partien vorausgeben, sein Vortheil wäre nach 1) und 2) nur halb so groß wie vorhin, nur $= 1/3$. Aber der Verlust des ersten Spieles setzte ihn jetzt gleich in die Lage 3) wo er mit B gleiche Hoffnung erhält, die noch einmal so viel als vorhin beträgt. Dieser Theil beträgt jetzt auch $1/3$. Also hat A $2/3$ und B $1/3$ zu empfangen.

Sobald wir aber für diese Arten des Spiels die Zahl der Spieler und die Anzahl der Spiele in dem geforderten Ueberschuß noch mehr vergrößern und die Hoffnung der einzelnen Spieler verschieden setzen, kommen wir nach und nach auf immer schwierigere Aufgaben der combinatorischen Analysis und der Integration von Gleichungen mit partiellen Differenzen. Diesem gehe ich für meinen Zweck nicht weiter nach.

§. 22.

1) Unsere zweite Regel (§. 20.) folgt unmittelbar aus der Anwendung des Begriffes der mathematischen Hoffnung auf die Voraussetzung der Theilung in gleichmögliche Fälle, auch ohne daß wir auf §. 11. und 12. zurückgehen.

Wenn die Ereignisse A und B, von welchen durch das eine b gewonnen und durch das andere a verloren wird, verhältnißmäßig die Wahrscheinlichkeiten haben

$$c = \frac{m}{m+n}, \quad f = \frac{n}{m+n},$$

so ist $bc - af = \frac{bm - an}{m+n}$.

Ist nun r groß genug, so müssen bei $r(m+n)$ Wiederholungen im Durchschnitt rm Ereignisse A und rn Ereignisse B erfolgen, das Wahrscheinlichste wird also, daß der Spieler, der für A wettet, die Summe $bmr - anr$ erhält, welche verschwindet, wenn die mathematische Hoffnung gleich, oder $bm = an$.

Dies ist eine Bestimmung nur nach relativer Wahrscheinlichkeit (§. 3.), wir erhalten aber auch eine immer größer werdende absolute Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der Zahl der Ereignisse A zu der Zahl aller Versuche in den Grenzen $\frac{m+1}{m+n}$ und $\frac{m-1}{m+n}$ im Durchschnitt eingeschlossen seyn werde, wenn man $r(m+n)$ Versuche umfaßt und r groß genug nimmt. Nämlich nach §. 12. 2) wenn man m für p, n für q, r für n setzt.

Setzt man in diesen Formeln sm und sn statt m und

n, so werden diese Grenzen $\frac{s\,m+1}{s\,(m+n)}$ und $\frac{s\,m-1}{s\,(m+n)}$, die sich auf zusammengesetzte Ereignisse beziehen, in welchen höchstens $r\,s\,m+r$ von der Art A mit $r\,s\,n-r$ von der Art B, und wenigstens $r\,s\,m-r$ von der Art A mit $r\,s\,n+r$ von der Art B in Verbindung vorkommen. In dem ersten Falle erhält der Spieler, der für A wettet $(r\,s\,m+r)\,b$ und giebt $(r\,s\,n-r)\,a$; der Werth dieses zusammengesetzten Ereignisses ist daher $(r\,s\,m+r)\,b-(r\,s\,n-r)\,a=r\,s\left(m\,b-n\,a+\frac{a+b}{s}\right)$. Ist dieser Werth positiv, welches stattfindet, wenn $m\,b+\frac{a+b}{s}>n\,a$, so drückt er den Gewinn des Spielers, der für A wettet, und den Verlust desjenigen, der für B wettet, aus.

In dem zweiten Fall erhält man anstatt dessen

$$(r\,s\,m-r)\,b-(r\,s\,n+r)\,a=r\,s\left(m\,b-n\,a-\frac{a+b}{s}\right),$$

ein Werth, der negativ wird, wenn

$$n\,a+\frac{a+b}{s}>m\,b,$$

der also einen Verlust für den ersten Spieler und Gewinn für den zweiten ausdrückt.

Ist also $b\,m=a\,n$, so ist Alles zwischen ihnen gleich, sie haben beide dieselbe Wahrscheinlichkeit, nicht mehr zu gewinnen oder zu verlieren, als die Summe

$$r\,s\left(\frac{a+b}{s}\right)=r\,(a+b),$$

das heißt einen bestimmten Theil des ganzen Einsatzes eines jeden Spielers, denn setzt man aus der Gleichung $b\,m=a\,n$ $\frac{a\,n}{m}$ anstatt b, so wird dieser Ausdruck $\frac{r\,a\,(m+n)}{m}$, und da der ganze Einsatz des Spielers, der für A wettet, $r\,s\,a\,(m+n)=M$ beträgt, so erhält man

$$r\,(a+b)=\frac{M}{s\,m}:$$

die gewonnene oder verlorene Summe hat also zum ganzen Einsatz das Verhältniß $\frac{1}{sm}$, welches um so kleiner wird, je mehr s wächst.

Auf gleiche Art ergiebt sich für den, der für B wettet, $r(a+b) = \frac{M}{sn}$, wo $M = rsb(m+n)$ wird.

Da man nun für s jeden beliebigen Werth setzen kann, so können die Verhältnisse $\frac{1}{sm}$, $\frac{1}{sn}$ so klein werden, als man will, und nimmt man nun für r immer größere Zahlen, so ergiebt sich eine immer größer werdende Wahrscheinlichkeit, daß die gewonnene oder verlorene Summe einen noch so kleinen Theil von ihrem ganzen Einsatz nicht übersteigen werde. Da aber $r(a+b)$ verhältnißmäßig mit r wächst, so wird sie mit der wachsenden Zahl der Versuche, d. h. je länger man fortspielt, für sich immer größer, da die Zahl der Versuche $rs(m+n)$ war.

Diese Formeln sind also der Ausdruck des im Unbestimmten auch ohne Rechnung einzusehenden Satzes: wenn zwei Spieler fortgesetzt nach einer Regel spielen, die jedem die gleiche mathematische Hoffnung gewährt, so steigt die Summe des wahrscheinlichen Gewinnes oder Verlustes immer höher, je länger sie spielen, aber diese Summe macht doch nach und nach einen immer kleinern Theil des ganzen Einsatzes, so daß man das Verhältniß dieses Theils zum Ganzen so klein machen kann, als man will, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von Spielen voraussetzt. Mit andern Worten: die wahrscheinlichen Summen, welche bei Fortsetzung eines ganz gleichen Spiels der einzelne Spieler wagt, wachsen im Verhältniß der Fortsetzung des Spiels und werden mit r über jede Grenze wachsen, obgleich nicht im Verhältniß des ganzen Einsatzes, sondern vielmehr so, daß sie von diesem nach und nach einen immer kleinern Theil ausmachen.

Diese Sätze drücken den wahren Sinn der Gleichheit in der mathematischen Hoffnung aus. Es liegt darin nicht die Bedeutung, daß unter diesen Bedingungen dem Spieler eine gewisse Sicherheit, nicht zu verlieren, gegeben werde, sondern es ist grade der Ausdruck der völligen Unsicherheit darin, welcher gewinnen und welcher verlieren werde; beide haben gleiche Wahrscheinlichkeit für gleichen Gewinn oder Verlust, beide wagen gleichmäßig, immer um so mehr, je länger sie spielen, ja die Wahrscheinlichkeit, daß der Gewinn des einen, unbestimmt welches, folglich der Verlust des andern jede bestimmte Summe übersteigen werde, läßt sich so hoch bringen, als man will, wenn man die Anzahl der Spiele hinlänglich vermehrt.

2) Da nun gleiche mathematische Hoffnung jedem Spieler gleichen Verlust und Gewinn verspricht, so versteht sich von selbst, daß im Durchschnitt immer dem ein Gewinn fallen müsse, der mit größerer mathematischer Hoffnung spielt, und dies immer um so mehr, je länger man das Spiel fortsetzt. Dies steht so in unsern Formeln.

Setzen wir die Hoffnung des zweiten Spielers größer, so daß $an = bm + c$, so folgt aus dem vorigen

$$rs\left(-c + \frac{a+b}{s}\right) \quad \text{Gewinn des ersten, Verlust des zweiten,}$$

und $$-rs\left(c + \frac{a+b}{s}\right) \quad \text{Verlust des ersten, Gewinn des zweiten.}$$

So wie also $c > \frac{a+b}{s}$ verwandelt sich der Gewinn des ersten in Verlust und der Verlust des zweiten in Gewinn.

Im Durchschnitt gewinnt also der Zweite fortwährend und der Erste verliert, und das immer um so mehr, je länger das Spiel fortgesetzt wird, d. h. je größer s wird, indem dadurch die Grenze $c = \frac{a+b}{s}$ immer kleiner wird.

3) Bisher haben wir nur 2 Ereignisse als möglichen Erfolg eines Versuches gegen einander vorausgesetzt, man kann aber die mathematische Hoffnung auch bei jeder andern

Art des Zufalls anwenden. Folgendes ist ein einfaches Beispiel. Zwei spielen unter der Bedingung mit einander, daß der eine einen gewöhnlichen Würfel wirft und für jeden Wurf so viele Gulden bekommt, als er Augen geworfen hat. Es fragt sich, wie viel muß der Werfende für jeden Wurf voraus geben, damit diese Bedingung in billiger Wette bestehen könne? Die mathematische Hoffnung des Werfenden bildet sich aus der Summe aller sechs ihm gleichmöglichen Ereignisse, von denen jedes die Wahrscheinlichkeit $1/6$ hat. Also wird seine Zahlung

$$1/6\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3^1/_2$$

als der mittlere Werth jedes Wurfes, dem hier kein einzelner Wurf genau entspricht. Die Zahlungen gleichen sich aber so aus, daß er bei den Augen 1, 2, 3 einen Verlust hat von $2^1/_2$, $1^1/_2$, $1/_2$, hingegen bei den Augen 4, 5, 6 einen Gewinn von $1/_2$, $1^1/_2$, $2^1/_2$, so daß sie sich gegenseitig decken.

Für den andern Spieler gilt dasselbe, nur in umgekehrter Ordnung.

§. 23.

Bei der Anwendung des Begriffes von der mathematischen Hoffnung ist endlich das Wichtigste, diese Bedeutung desselben nur für eine Durchschnittsrechnung.

1) Man kann dies am bequemsten an der Einrichtung von Glücksspielen erläutern. Ich nehme zum ersten Beispiel das Faro. Die Bank spielt hier in Auszügen von zwei Blättern, das erste für sich, das andere für die Spieler; es gelten aber die Karten nur nach dem Bild, ohne Unterschied der Farben, und die Bank hat die Vortheile voraus, daß das letzte Blatt, welches für die Spieler fällt, nicht gilt, und bei dem Zug, wo auf beide Seiten dasselbe Bild fällt (plié, refait), der halbe Einsatz verloren wird. Spielt nun die Bank nur mit einem Kartenspiel von 52 Blättern, so fallen jedesmal 26 für sie, und nur 25 für die Spieler, dies wird ihr also im Durchschnitt 4% Gewinn sichern. Mischt sie hingegen zwei Kartenspiele zusammen, so würde dieser Vor-

theil nicht ganz 2%, mischt sie vier Spiele, noch nicht 1% betragen.

Was ferner die Plié's betrifft, so liegen in den 52 Blättern 52.51 bestimmte Amben. Es kommt aber jedes Bild in vier Farben vor, also in 12 bestimmten Amben, welche plié sind und der Bilder sind 13. Zählen wir dies zusammen, so liegen 12.13 plié im ganzen Spiel. Sie sind also der Theil $\frac{12.13}{52.51} = \frac{1}{17}$ aller Auszüge. Dies macht 6% und da die Bank hiervon den halben Satz erhält, so beträgt daraus der Vortheil der Bank nahe bei 3%.

Diese mathematische Hoffnung gilt für die Bank mit großer Sicherheit, denn von den 52.51 bestimmten Amben kommen in jedem Kartenspiel 26 heraus, also fallen in 102 Kartenspielen, welche die Bank auslegt, schon im Durchschnitt alle möglichen Auszüge für und wider.

So steht der Vortheil der Bank, noch abgesehen von der Unvorsicht der Spieler, aber doch unter der Gefahr einer sehr ungleichförmigen Besetzung der Karten.

2) Stellen wir dagegen die gewöhnliche Zahlenlotterie, das Lotto di Genova oder die ehemalige Lotterie de France. Die Bank läßt in jeder Ziehung von 90 Nummern fünf ziehen, und die Spieler wählen sich jeder fünf Nummern aus den 90 und machen dafür einen bestimmten Einsatz. Wie stehen hier die mathematischen Hoffnungen?

Für den einfachen Auszug stehen 5 Nummern gegen 90, der Spieler hat also die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ für sich und $\frac{17}{18}$ gegen sich. Die gleiche mathematische Hoffnung fordert also, daß er den 17fachen Einsatz gewinne, oder den 16fachen erhalten soll.

Der bestimmte Auszug, eine Nummer auf einen bestimmten Zug gewettet, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{90}$, sollte also 90fachen Einsatz wieder bringen.

In 90 Nummern sind $\frac{90.89}{1.2} = 4005$ Amben, die 5 Nummern einer Ziehung aber enthalten $\frac{5.4}{1.2} = 10$ Amben;

also sollte eine gerathene Ambe den $\frac{10}{4005}$ = 400,5fachen Einsatz bringen.

Bestimmte Amben sind noch einmal so viele, also 8010. Hier ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8010}$ und sollte 8010fachen Einsatz bringen.

Ferner Ternen liegen in 90 Nummern $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ = 117480, und die fünf Nummern der Ziehung enthalten deren $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ = 10, folglich sollte die gerathene Terne 11748 Einsatz bringen.

Die Zahl der Quaternen ist $\frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ = 2555190, von denen die fünf Nummern der Ziehung $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ = 5 enthalten.

Eine Quaterne sollte 511038 Einsatz bringen.

Was bedeutet aber diese mathematische Hoffnung?

In Frankreich wurden in vier Städten monatlich zwei Ziehungen, also im Ganzen jährlich 96 Ziehungen gehalten. Dies gibt für die einfachen Auszüge ein gut geordnetes Spiel, indem im Durchschnitt jährlich mehr als fünfmal alle Nummern herauskommen werden; unsicher bleibt nur die ungleiche Besetzung der einzelnen Nummern.

Auch das Spiel der Amben hat noch einen leidlichen Durchschnitt für eine so große Bank, indem jährlich 960 unbestimmte gezogen werden, und also in $\frac{4005}{960}$ d. h. in etwas mehr als vier Jahren im Durchschnitt alle herauskommen.

Aber Ternen kommen im Jahr auch nur 960 heraus, also würden sie im Durchschnitt in $\frac{11748}{96}$ = 122³/₈ einmal alle vorkommen.

Und Quaternen hatten wir nur 5 in einer Ziehung, also 480 im Jahr, so daß diese im Durchschnitt erst in $\frac{255519}{48} = 5323^5/_{16}$ Jahren alle sich zeigen könnten.

Das Spiel mit den Ternen und Quaternen ist also auch für die Bank ein ganz blindes Glücksspiel, welches nur dazu gegeben wird, um durch die Vorspiegelung der hohen Gewinne für kleinen Einsatz die Spieler zu locken. Die mathematische Hoffnung setzt nämlich bei den Ternen voraus, daß das Spiel sehr viele mal 122 Jahre, und bei den Quaternen gar, daß es sehr viele mal 5323 Jahre wiederholt werde.

Aber auch dieser Ueberschlag für den Durchschnitt zur Fixirung der mathematischen Hoffnung ist noch höchst unbestimmt, indem wir die Wiederholungen derselben Combinationen außer Acht gelassen, und nur die Zeit bestimmt haben, in der sie alle vorkämen, ohne eine zu wiederholen. Wie sehr das den Ueberschlag ändert, zeigt Eulers Beispiel. Die Lotterie habe m Nummern, a, b, c . . . m, von denen jedesmal i gezogen worden, man fragt, wie wahrscheinlich ist es, daß in n Ziehungen jede Nummer wenigstens einmal erscheinen wird? wobei man also $n > \frac{m}{i}$ nehmen muß. Die Anzahl aller möglichen Ziehungen entspricht der Zahl der Combinationen von m Elementen in der i ten Classe, und diese ist

$$\frac{m \,.\, m-1 \ldots\ldots (m-i+1)}{i!},$$

welches wir $= p_m$ setzen, um mit p_{m-1}, p_{m-2} u. s. w. das analoge für $m-1$, $m-2$ u. s. w. Elemente bezeichnen zu können. Fragen wir nun weiter nach der Anzahl möglicher Fälle für n Ziehungen nach einander, so müssen wir diese suchen in der n ten Classe der Variationen mit Wiederholungen von jenen Combinationen, diese Zahl ist also

$$\left\{\frac{m \,.\, m-1 \ldots (m-i+1)}{i!}\right\}^n = p_m^n$$

Wollen wir nun aus dieser ganzen Zahl nur die Varia-

tionen behalten, in denen alle Buchstaben vorkommen, so können wir erstens einmal die abziehen, in denen je ein Buchstabe fehlt. Die Zahl der letztern ist aber für jeden fehlenden Buchstaben die ganze Zahl einer Lotterie, die nur $m-1$ Nummern hätte. Also $= p^n_{m-1}$. Aber der Buchstaben sind m, folglich beträgt dies $m\,p^n_{m-1}$. Dieses nun von p^n_m abgezogen, gibt

$$p_m - \frac{m}{1}\,p^n_{m-1}.$$

Aber unter den Variationen, welche a nicht enthalten, finden sich auch die, welche weder a noch b haben u. s. f., daher sind hier alle Variationen für je zwei fehlende Buchstaben zweimal abgezogen, und hätten doch nur einmal weggenommen werden sollen, also müssen wir sie einmal wieder hinzuthun. Diese Zahl bezieht sich auf eine Lotterie, die zwei Nummern weniger zählt, sie ist also p^n_{m-2}, und die Zahl der Binionen ist $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$, also ergibt sich der Ausdruck

$$p^n_m - \frac{m}{1}\,p^n_{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\,p^n_{m-2}.$$

Ferner die Variationen, wo drei Buchstaben, z. B. a, b, c fehlen, sind zuerst 3 mal abgezogen, nämlich mit denen, wo a, dann mit denen, wo b, und mit denen, wo c fehlt; aber hierauf sind sie auch wieder 3 mal hinzugekommen, nämlich mit denen, wo a und b, dann a und c, endlich b und c zugleich fehlen. Dies gleicht sich aus und sie müssen also nochmals weggenommen werden. Ihre Anzahl bezieht sich auf eine Lotterie von $m-3$ Elementen, sie ist also p^n_{m-3}, und die Zahl der Ternen von m Elementen $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Also ist $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,p^n_{m-3}$ abzuziehen.

Bis dahin haben wir also

$$p^n_m - \frac{m}{1} p^n_{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2} p^n_{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} p^n_{m-3}.$$

Setzen wir diese Betrachtung fort für die Variationen, wo 4 Elemente fehlen u. s. w., so sieht man leicht, daß sich die Reihe unter der Form bildet:

$$p^n_m - {}^m\overset{1}{\mathfrak{B}}\, p^n_{m-1} + {}^m\overset{2}{\mathfrak{B}}\, p^n_{m-2} - {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}}\, p^n_{m-3} + {}^m\overset{4}{\mathfrak{B}}\, p^n_{m-4}$$

und dies so fort, bis zu dem Glied p^n_{i+1}, denn i Elemente waren ja in jeder Combination.

Die Summe dieser ganzen Reihe gibt also die gesuchte Anzahl aller Variationen, in denen alle m Elemente vorkommen und ihre Wahrscheinlichkeit wird erhalten, wenn wir das Ganze durch p^n_m dividiren.

Setzen wir die gefundene Reihe $= p^n_m - A + B - C +$ u. s. w., so wird die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{A}{p^n_m} + \frac{B}{p^n_m} - \frac{C}{p^n_m} + \ldots$$

Dieses nun finden wir leicht zu berechnen, wenn wir bedenken, daß

$$\frac{p^n_{m-1}}{p^n_m} = \left\{\frac{m-1.m-2\ldots m-i}{m.m-1\ldots m-i+1}\right\}^n = \left(\frac{m-i}{m}\right)^n,$$

also $\frac{A}{p^n_m} = \frac{m}{1}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n$.

Ferner $\frac{p^n_{m-2}}{p^n_{m-1}} = \left\{\frac{m-2.m-3\ldots m-i-1}{m-1.m-2\ldots m-i}\right\}^n = \left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n.$

Weil nun $\frac{B}{p^n_m} = \frac{A}{p^n_m} \times \frac{B}{A}$, so gibt dies $\frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}$

$\left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n$ und $\frac{B}{p^n_m} = \frac{A}{p^n_m} \times \frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n$, so daß in dieser Weise jedes folgende Glied leicht durch das vorhergehende in der schnell fallenden Reihe bestimmt wird.

Setzt man nun $m = 90$, $i = 5$, $n = 100$, so geben 6 Glieder der Reihe auf wenigstens $\frac{1}{10000}$ genau 0,7410 als die Wahrscheinlichkeit, daß die 90 Nummern alle in 100 Ziehungen herausgekommen seyn werden. Für $n = 200$ reichen schon die beiden ersten Glieder hin, diese Wahrscheinlichkeit = 0,9990 zu bestimmen. Gehen wir mit den Werthen von n zurück, so findet sich die Wahrscheinlichkeit = $1/2$ zwischen der 85sten und 86sten Ziehung.

Der Durchschnitt, den wir einfach für 18 Ziehungen anzusetzen hatten, kommt also erst nach mehr als 100 Ziehungen der Sicherheit nahe.

Daher muß sich hier jede Bank, um sicher zu seyn, sehr große Vortheile vorbehalten. So bezahlte die Lotterie de France den einfachen Auszug anstatt mit 18 nur mit 15, stellt also ihre mathematische Hoffnung um $3/18$ oder $1/6$ höher, als die der Spieler. Bei einem bestimmten Auszug zahlt sie nur 70 mal anstatt 90 mal den Einsatz, so daß sie ihre Hoffnung $\frac{20}{90}$ oder $\frac{2}{9}$ höher stellt, als die der Spieler. Dies wird nun mit Steigerung fortgesetzt, bei der Ambe bezahlt die Bank nur 270 mal anstatt 400,5 mal, da nun $400,5 - 270 = 130,5$, so hat die Bank hier den Vortheil $\frac{1305}{4005} = \frac{29}{89}$. Bei der bestimmten Ambe zahlt sie 5100 mal anstatt 8010 mal, folglich ist, da $8010 - 5100 = 2910$, ihr Vortheil $\frac{291}{801}$. Ferner die Terne wird nur 5500 fach bezahlt anstatt 11748 fach; nun ist $11748 - 5500 = 6248$, folglich der Vortheil $\frac{6248}{11748} = \frac{142}{267}$. Endlich der Quaterne wird

75000facher Einsatz versprochen anstatt des 511038fachen. Da nun 511038 — 75000 = 436038, so wird $\frac{436038}{511038}$ = $\frac{218019}{255519}$ der Vortheil der Bank.

§. 24.

Diese Bedeutung des Begriffs der mathematischen Hoffnung nur für die Durchschnittsrechnung ist oft von unsern besten Lehrern verkannt worden. So sagt Lacroix, indem er dem Daniel Bernoulli folgt: Berücksichtigt man nur die mathematische Hoffnung, so ergibt sich, daß es gleichgültig sei, ob man eine Summe bei einem einzigen Zufall wagt, oder sie auf mehrere vertheilt, die dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, z. B. die Waare auf ein einziges Schiff zu verladen, oder sie auf mehrere zu vertheilen, wenn die Gefahr des Verlustes für alle Schiffe dieselbe ist. Dies wollten wir ihm zugeben, auch ohne uns auf seine Berechnung der Potenzen des Binomium zu berufen. Besorgen z. B. 100 gleiche Schiffe jährlich einen Verkehr mit einer Gefahr, daß im Durchschnitt jährlich 5 Ladungen davon verloren gehen, so laufe ich Gefahr, wenn ich meine Waare auf ein Schiff verlade, alle 20 Jahre im Durchschnitt eine ganze Ladung zu verlieren; vertheile ich hingegen meine Ladung auf alle Schiffe, so werde ich ziemlich gewiß jedes Jahr $^1/_{20}$ derselben verlieren. Die mathematische Hoffnung rücksichtlich des Verlustes ist also beidemal $^1/_{20}$. Dies, meint nun Lacroix, stimme nicht mit dem gesunden Menschenverstand, welcher es für vortheilhafter halte, die gefährdete Summe zu vertheilen. Aber der Grund der letzten Meinung liegt ja nahe. Vertheile ich an alle Schiffe, so habe ich nach einem jährigen Durchschnitt 5% Verlust zu erwarten, und wenn mein Geschäft diesen vertragen kann, so habe ich ein sicheres Geschäft. Verlade ich dagegen auf ein Schiff, so habe ich nach einem zwanzigjährigen Durchschnitt 5% Verlust zu erwarten. Hier kann ich es glücklich treffen und viele Jahre ohne

Verlust bleiben, aber ich wage weit mehr, denn ich kann auch gleich meine ganze Ladung verlieren, und wenn diese mein kaufmännisches Vermögen übertrifft, mit einem Schlage ruinirt seyn, und jedenfalls verbessert der Verlust meine zukünftige Hoffnung nicht; dies Geschäft bleibt ein weit gefährlicheres. Diese in den Bedingungen des Geschäfts liegenden Verschiedenheiten des Durchschnitts werden sich aber durch keine Formel darstellen lassen.

So stimmt die gemeine Meinung jedes Kundigen hier mit der Berechnung der mathematischen Hoffnung überein. Und auch, wenn nur das Wagniß bei einzelnen Fahrten in der gewöhnlichen Weise beurtheilt werden soll, erhalten wir das ähnliche. Sehen wir die Gefahren der einzelnen Schiffe als von einander unabhängig an, und nehmen wir die Abschätzung der 5% wahrscheinlichen Verlustes wie eine Wahrscheinlichkeit a priori, so ist nun das Spiel der Ereignisse dem Spiel mit einem, zwei, drei oder mehreren Würfeln von 20 Seiten zu vergleichen, deren jeder 19 weiße Seiten A und 1 schwarze Seite B hätte. Hier habe ich bei einem Würfel unter 20 Fällen einmal B, bei zweien unter 400 Fällen nur einmal B B, bei dreien unter 8000 Fällen nur einmal B B B u. s. ferner. Ich habe also bei Verladung auf einem Schiffe die Wahrscheinlichkeit $^{19}/_{20}$ nichts zu verlieren, bei zweien die Wahrscheinlichkeit $^{399}/_{400}$ nicht über die Hälfte, bei dreien die Wahrscheinlichkeit $^{7999}/_{8000}$ nicht über $^{2}/_{3}$ zu verlieren u. s. f. Das heißt, die Rechnung stimmt auch hier ganz mit der gemeinen Meinung zusammen. Macht sich der Kaufmann nichts daraus, auf einmal eine ganze Versendung zu wagen, so gewinnt er mit der Vertheilung nichts, will er hingegen die Verluste lieber in kleinere Theile vertheilen, so gelingt ihm dies um so besser, je mehr Schiffe er in Anspruch nimmt.

Gleich daneben in §. 76. steht das zweite Beispiel, die sogenannte Petersburger Aufgabe, für welche Nicolaus Bernoulli dem Montmort die Frage stellt:

Im Spiel: Wappen oder Schrift (Croix ou Pile), erbietet sich Peter, eine Münze in die Luft zu werfen, und ver-

spricht an Paul einen Ducaten, wenn bei dem ersten Wurfe, nachdem die Münze an die Erde gefallen ist, das Wappen zu oberst liegt; ist dies erst beim zweiten Wurfe der Fall, so will er ihm 2 Ducaten geben, 4 aber, wenn es erst beim dritten der Fall ist u. s. f., so daß bei jedem folgenden Wurfe die Summe verdoppelt wird. Was hat für gleiche mathematische Hoffnung Paul dagegen zu setzen?

Wir haben für Paul
die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^n}$
zu gewinnen $1, 2, 4 \ldots 2^{n-1}$ Ducaten
wenn Wappen fällt beim 1sten, 2ten, 3ten . . . nten Wurf.
Die mathematische Hoffnung seines Gewinnes hat daher einen Werth von $\frac{1}{2} . 1 + \frac{1}{4} . 2 + \frac{1}{8} . 4 + \ldots \frac{1}{2^n} . 2^{n-1} = \frac{n}{2}$.

Hier fand man nun in der Rechnung das Paradoxon, es sei nicht unmöglich, daß das Wappen erst nach einer Anzahl Würfen erscheine, die größer ist, als jede beliebige Zahl; müßte man also nicht vor dem Spiele n unendlich groß setzen? Aber wer wird wol auf dies Spiel nur eine irgend bedeutende Summe wagen wollen? Um diese Schwierigkeit zu heben, sind manche unbefriedigende Versuche gemacht worden, aber nur, weil man die nur durchschnittliche Bedeutung der mathematischen Hoffnung nicht genau genug anerkannte. Dies Spiel wird ein gut geordnetes Glücksspiel, wenn man in ihm für n einen bestimmten Werth annimmt.

Z. B. n sei gleich 4. Fällt Wappen auf den ersten Wurf, so zahlt Peter 1; auf den zweiten 2, auf den dritten 4, auf den vierten 8; fällt aber 4 mal Schrift, so soll dies ein blinder Wurf seyn und das Spiel fängt von neuem an. Dagegen setzt Paul für jedes Spiel 2. Hier haben beide gleiche mathematische Hoffnung. Das Spiel nämlich zerfällt in Partien zu 16 Spielen. Davon werden im Durchschnitt 8 Spiele mit dem ersten Wurf enden und bringen 8, 4 mit dem 2ten und bringen 4 . 2 = 8, 2 mit dem 3ten und bringen 2 . 4 = 8, 1 mit 4ten bringt 8 und ein Wurf wird im Durchschnitt blind bleiben, also Paul gewinnt 4 . 8 = 32

und zahlt $2 \cdot 16 = 32$. Oder n sei gleich 10, so kostet jedes Spiel 5 und wir erhalten Partien von $2^{10} = 1024$ Spielen, die sehr oft wiederholt werden müssen, um der mathematischen Hoffnung Bedeutung zu geben. Die Rechnung steht hier so: $512 \cdot 1 + 256 \cdot 2 + 128 \cdot 4 + 64 \cdot 8 + 32 \cdot 16 + 16 \cdot 32 + 8 \cdot 64 + 4 \cdot 128 + 2 \cdot 256 + 1 \cdot 512 = 1024 \cdot 5$ gleich dem, was Paul für 1024 Spiele einsetzt. Es werden also für die Anwendung dieses Durchschnitts Partien von 2^n Spielen, und diese in immer größerer Anzahl verlangt. Für $n = \infty$ müßten also Partien von unendlich vielen einzelnen Spielen unendlich oft wiederholt werden.

§. 25.

Das aber bleibt bei dieser Lehre doch immer das entscheidend Wichtige, daß alle Durchschnittszahlen der Wahrscheinlichkeit doch nur einen Durchschnitt für unsichere Erfolge bestimmen. Die ganze Rechnung bleibt gleichsam ohne festen Boden, immer in der Luft schwebend. Daher sahen wir, daß, wenn sich Jemand fortgesetzt bei ganz gleicher mathematischer Hoffnung einem Spiel anvertraut, er dabei immer wagt, sein ganzes Vermögen zu verlieren, ja wenn gleich überwiegende mathematische Hoffnung ihm bei langer Fortsetzung große Vortheile verspricht, so ist er doch auch da vor einzelnen großen Unglücksfällen nicht sicher. Aus demselben Grunde folgt, daß niemand Lust haben wird, gegen einen noch so wahrscheinlichen sehr kleinen Gewinn eine große Summe zu wagen. Wer nicht Lust hat, 1000 Thaler zu verschenken, wird sie gegen einen Thaler Gewinn nicht leicht setzen, und wenn er auch die Wahrscheinlichkeit $\frac{10000}{10001}$ gegen $\frac{1}{10001}$ hätte, zu gewinnen. Hingegen eine unbedeutende Summe wagen wir umgekehrt leicht für einen noch so unsichern großen Gewinn. Diesen Unterschied schlägt die Berechnung der mathematischen Hoffnung nicht mit an, nach ihr

erscheint das Spiel als gleich, wenn $bc = af$, es mag mit der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes $\frac{1000}{1001}$ 1000 gegen 1 oder mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1001}$ 1 gegen 1000 gesetzt werden. Man sieht leicht, daß der Grund hiervon in einem relativen Werth liege, welchen dieselbe Geldsumme für den einen oder andern Menschen hat. Dieser Werth läßt sich nun im Allgemeinen gar nicht berechnen, eine kleine Geldsumme ist dem minder Vermögenden weit wichtiger, als dem Reichen, dem schwachen oder ungeschickten, als dem geschickten, thätigen Arbeiter, aber auch dem Sparsamen wichtiger, als dem Verschwender, dem Vorsichtigen als dem Unvorsichtigen, und wieder dem Geizigen wichtiger, als dem edeln Wohlthäter. Man hat indessen dabei auf die Voraussetzung eine Rechnung zu gründen gesucht, daß sich dieser relative Werth einer Geldsumme aus ihrem Verhältniß zum ganzen Vermögen eines Mannes bestimmen lasse. Die Versuche dazu wollen wir erst angeben und dann beurtheilen.

Hier hat die Nichtbeachtung dieser durchschnittlichen Bedeutung der mathematischen Hoffnung nun auf die Rechnnng für die sogenannte moralische Hoffnung geführt. Man geht von der Betrachtung aus: auch bei einer beträchtlichen Wahrscheinlichkeit wird Niemand eine bedeutende Summe für einen zu erwartenden kleinen Gewinn wagen, aber leicht wird man bei kleiner Wahrscheinlichkeit eine geringe Summe wagen in der Hoffnung auf großen Gewinn, wiewol auf beiden Seiten die mathematische Hoffnung die gleiche seyn kann. Dies ist dann schon mit der sogenannten moralischen Schätzung der Wichtigkeit gewisser Summen (z. B. bei Lacroix §. 68.) verglichen worden, aber ungenau. Denn ist von einzelnem Wagen die Rede, so ist ja doch klar, daß ich lieber viel gewinne und wenig verliere, als wenig gewinne und viel verliere. Hier hat eben die mathematische Hoffnung keine Bedeutung. Spielt man aber fortgesetzt unter denselben Bedingungen, so bleibt auch bei gleicher mathematischer Hoffnung,

wie ich oben gezeigt habe, das erste Spiel gefährlicher, bei dem ich im unglücklichen Fall viel wage, weil der einmal erlittene Verlust die mathematische Hoffnung des Spielers nicht bessert, sondern unverändert läßt.

Indessen steht daneben doch der bestimmte Gedanke, daß eine gleiche Summe dem Armen größere Wichtigkeit hat, als dem Reichen, und man kann da wol sagen, 10 sind für den, der nur 1000 besitzt, eben so viel, als 100 für den, der 10,000 besitzt. Wollen wir dann diese Schätzung gelten lassen, daß einem Jeden eine bestimmte Summe eine relative Wichtigkeit habe nach dem geometrischen Verhältniß derselben zu seinem ganzen Vermögen, so kann man dafür eine Rechnung anlegen, zu der Buffon *) die Andeutung gab, und welche Daniel Bernoulli **) ausführte.

Der erste Satz ist hier, daß die gleiche Summe immer als Verlust eine größere Wichtigkeit hat, als wenn sie gewonnen wird. Jemand hat 1000, verliert er 100, so behält er 900, und die 100 sind $1/9$ seines jetzigen Vermögens; gewinnt er aber 100, so hat er 1100, die 100 sind nur $1/11$ seines Vermögens.

Allgemein sei a der vorige Besitz und α der Gewinn oder Verlust, so wird die Wichtigkeit dieser Summe als Verlust $\frac{\alpha}{a-\alpha}$, als Gewinn $\frac{\alpha}{a+\alpha}$ und der Unterschied zwischen beiden wird $\frac{2\alpha^2}{a^2-\alpha^2}$.

Suchen wir nun den Werth eines Verlustes, der mit einem Gewinn gleiche Wichtigkeit hat, und setzen den Verlust $= x$, so erhält man $\frac{x}{a-x} = \frac{\alpha}{a+\alpha}$, also $x = \frac{a\alpha}{a+2\alpha}$ ***).

*) Essai d'Arithmétique morale, p. 69, t. IV. du Supplément de l'histoire naturelle.

**) Commentarii Acad. Petrop. t. 5. p. 175.

***) Ich gebe diese Rechnung anders, als gewöhnlich, z. B. Lacroix, §. 69; ich glaube richtiger.

Nehmen wir aber mit Daniel Bernoulli α sehr klein gegen a, so werden die Ausdrücke der Wichtigkeit für Gewinn und Verlust immer näher einander gleich. Nun sei $a + x$ ein Vermögen, welches sich stetig verändert, so ist beide Mal die Wichtigkeit des Differentials der Veränderung $= \frac{dx}{a+x}$, und daher überhaupt die Wichtigkeit y des veränderlichen Vermögens $y = \int \frac{dx}{a+x} = \log.\ (a + x) + \text{Const.}$

Soll nun $y = o$ werden, wenn $x = o$, so haben wir vollständig $y = \log.\ a + x - \log.\ a = \log.\ \frac{a+x}{a}$ als Maaß der Wichtigkeit des Besitzes x für die Vermehrung über a gerechnet.

Für die Anwendung dieser Formel bemerkt Bernoulli: nur von einem Menschen, der so eben vor Hunger stirbt, könnte man sagen, er besitze gar nichts. Derjenige, der sich durch Betteln eine jährliche Summe von 10 Goldstücken erwirbt, wird nicht 50 unter der Bedingung annehmen, dagegen dieses und jedes andere Mittel, sein Leben zu fristen, aufzugeben. Dasselbe gilt von Menschen, die nur vom Borgen leben. Könnten diese sich wohl dieses Hülfsmittel versagen, selbst für eine Summe, die mehr als hinlänglich wäre, ihre Schulden zu bezahlen? Sagt man also gleich im gemeinen Leben, der erste besitze nichts und der andere weniger als nichts, so werden sie doch selbst ihre Lage nicht so anschlagen, man wird auch für diese dem obigen a einen bestimmten Werth als Betrag ihres Vermögens geben müssen, der nie gleich Null wird. Im Allgemeinen wird hier das Vermögen eines Menschen nicht nur nach seinem augenblicklichen Besitz, sondern nach allen Hülfsmitteln seines Unterhaltes, auch nach der Anwendung seiner Kräfte, seines Fleißes, seiner Geschicklichkeit jeder Art und nach allen andern Vortheilen seiner äußern Lage geschätzt werden müssen.

Hier ist aber die Art der Abschätzung wesentlich geändert. Vorhin, nach Buffon, maßen wir die Wichtigkeit ei-

nes Gewinnes oder Verlustes nach dem Verhältniß desselben zum jedesmaligen Besitzstand, jetzt messen wir die Wichtigkeit größerer Kapitalien im Verhältniß zu einem angenommenen kleinsten. Wollen wir also hier bestimmten Gewinn oder Verlust schätzen, so müssen wir die Differenzen der Wichtigkeit zweier Kapitalien suchen, die um diese Summe verschieden sind.

Die Wichtigkeit des Kapitals x sei y, des Kapitals x' aber y'. So haben wir $y' - y = \log. \frac{x'}{a} - \log. \frac{x}{a} = \log. \frac{x'}{x}$.

Bedeutet nun, wie vorhin, a ein Vermögen, α einen Gewinn oder Verlust an demselben, so sei für den Gewinn $x' = a + \alpha$, $x = a$ und wir haben $y' - y = \log. \frac{a + \alpha}{a}$. Ferner für den Verlust sei $x' = a$, $x = a - \alpha$, und folglich $y' - y = \log. \frac{a}{a - \alpha}$.

Um nun einen Verlust z zu bestimmen, dessen Wichtigkeit der des Gewinnes α gleich wäre, hätten wir also $\log. \frac{a + \alpha}{a} = \log. \frac{a}{a - x}$ und $\frac{a + \alpha}{a} = \frac{a}{a - x}$; $x = \frac{a\alpha}{a + \alpha}$, also größer als nach Buffons Abschätzung, welche $x = \frac{a\alpha}{a + 2\alpha}$ gab.

Um nun bei Berechnung von Wahrscheinlichkeiten diese Bestimmung anzuwenden, setzt Daniel Bernoulli diese Wichtigkeit der Summen anstatt ihres unmittelbaren Werthes in die Formel für die mathematische Hoffnung eines unsichern Ereignisses.

Wenn z. B. eines von drei Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten e, f, g sind, und welche die Summen α, β, γ hervorbringen würden, eintreffen muß, also $e + f + g = 1$, und a den vorherigen Besitz bezeichnet, so wird anstatt der mathematischen Hoffnung $e\alpha + f\beta + g\gamma$ gesetzt $Y = e \log.$

$\frac{a+\alpha}{a} + f\log.\frac{a+\beta}{a} + g\log.\frac{a+\gamma}{a}$. Dies nennt Bernoulli **mensura sortis** und Laplace **fortune morale** im Gegensatz der **fortune physique**, oder des absoluten Werthes eines Kapitals von gleicher Wichtigkeit.

Wäre nun X dieses Kapital von gleicher Wichtigkeit, so erhalten wir

$Y = \log.\frac{X}{a}$ und daher $X = (a+\alpha)^e (a+\beta)^f (a+\gamma)^g$.

Sucht man nun den Werth des Gewinns, oder dessen, was Laplace die moraliche Hoffnung nennt, so muß man $X = a + x$ setzen und x bestimmen. Also $x = (a+\alpha)^e (a+\beta)^f (a+\gamma)^g - a$.

Beschränkt man sich dann in der Entwicklung dieser Formel nur auf die Glieder, in welchen α, β, γ in der ersten Potenz vorkommen, so findet man

$x = a^{e+f+g} + a^{e+f+g-1}(e\alpha + f\beta + \gamma g) - a$, das heißt $x = e\alpha + f\beta + g\gamma$. Also bekommt die moralische Hoffnung denselben Werth mit der mathematischen, wenn nur von sehr kleinen Veränderungen eines Vermögens die Rede ist.

Dieses sind die Grundlagen der von Laplace anerkannten Berechnungsweise des Daniel Bernoulli. Wie sollen wir nun über ihren Werth urtheilen? Hier sagt schon Daniel Bernoulli selbst *): **quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quam alteri, unicuique aequae sint adjudicandae partes; rationes autem nullas considerari, quae personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quae ad conditiones sortis pertineant.** Talem sententiam ferant judices supremi publica autoritate constituti, at vero hoc loco non judicia sed consilia danda sunt; regulae nempe, quibus quisque suam sibimet aestimare debeat sortem pro diversa rerum suarum constitu-

*) **Commentariae Academiae Petropolitanae, t. V. p. 175—176.**

tione. Er will also seine Regel nicht an die Stelle des Begriffs der mathematischen Hoffnung setzen, um die Billigkeit einer Wette zu bestimmen, sondern er will nur eine Regel geben, nach welcher jemand sich selbst sagen könnte, wieviel er nach seinem Vermögenszustande klugerweise in bestimmten Fällen wohl wagen dürfe, und dafür schätzt er die relative Wichtigkeit eines Zuwachses x zum Vermögen a durch jenes $k \cdot \log. \left(\frac{(a + x)}{a}\right)$.

Dabei wird auch noch leicht zugegeben werden, daß diese Regel lange nicht für alle Fälle passe, sondern nur für die einfachsten Fälle, bei denen Rousseau's Spruch: es ist schwerer, den ersten Louisd'or, als die letzte Million zu gewinnen, Anwendung findet, nur in den einfachsten Fällen, in denen man die ganzen Glücksumstände eines Mannes einem bestimmten zinsentragenden Kapital a gleichsetzen und die Wichtigkeit kleiner Gewinne oder Verluste im umgekehrten Verhältniß mit diesem berechnen kann. Dies findet freilich viele Ausnahmen. Wenn Jemand so viel Vermögen besitzt, daß er von dessen Zinsen bequem leben kann, so handelt er sehr thöricht, sein ganzes Vermögen dann noch an unsichere Speculationen zu wagen. Jeder Kaufmann thut gut, sobald er ein gewisses Glück erlangt hat, seine Geschäfte zu beschränken. So sehen wir in allen Familien der Handelstädte einen mittlern Reichthum sich lange und sicher forterben, während die ungeheuern Kapitale so oft in der Hand schon wieder zerrinnen, welche sie erst gesammelt hatte. Hingegen ein Mann, der mit kleinem Fonds oder mit kleinem Credit ein Geschäft anfängt, muß wol seinem Glücke vertrauen und viel wagen.

Indessen wir geben zu, daß es Fälle genug gibt, in denen jene Regel angenommen werden kann. Was hilft nun dann Bernoulli's Rechnung? Hier ist sie dafür gelobt worden, daß sie dem gewöhnlichen Urtheil: der Reiche darf mehr wagen, als der Arme, im Allgemeinen gemäßer entscheide, als die gewöhnliche Rechnung nach mathematischer

Hoffnung. Ich aber muß dagegen behaupten, daß sie uns höchst wunderliche Antworten gibt, während die gewöhnliche Berechnung nur, wie oben gezeigt ist, durch Irrthümer beschuldigt wird, falsche Antworten zu geben. Ich will dies durch Beispiele bei Bernoulli deutlich machen. (Lacroix §. 74.)

Es werden einem Kaufmanne 800 Thaler abgefordert, um ihm Waaren zu versichern, 10,000 Thaler an Werth, die bei ihrem Transport über Meer einer Gefahr verloren zu gehen ausgesetzt sind, deren Wahrscheinlichkeit $1/_{20}$ beträgt; ist dem Kaufmanne zu rathen, diesen Vertrag einzugehen?

Bernoulli setzt das übrige Vermögen des Kaufmanns a, wenn er also versichert, so wird sein Vermögenszustand nachher a + 9200. Wenn er aber nicht versichert, so soll sein moralischer Vermögensstand (fortune morale) seyn

$$(a + 10000)^{19/20} a^{1/20}.$$

Setzt man nun dies beides einander gleich, so wird $a + 9200 = (a + 10000)^{19/20} a^{1/20}$ und aus dieser Gleichung $a = 5043$. Diese Summe soll nun der Kaufmann wenigstens besitzen, wenn er die Versicherung nicht annehmen will.

Hingegen der Versicherer habe ein Vermögen b. Geht er nun auf das Geschäft ein, so wird seine moralische Hoffnung

$$(b + 800)^{19/20} (b - 9200)^{1/20} - b$$

und diese wieder = o gesetzt, gibt b = 14243 Thaler. So viel soll der Versicherer wenigstens besitzen, wenn er sich auf das Geschäft einlassen darf.

Dies scheint mir nun eine ganz unbrauchbare Bestimmung. Ein Mann, der nur 15000 besitzt, macht doch ein sehr unvorsichtiges Geschäft, 9200 daran zu wagen, um 800 zu gewinnen. Nur wenn eine Versicherungsunternehmung mit hinlänglichem Kapital fortgesetzt Geschäfte unternimmt, um eine Sicherheit im Durchschnitt rechnen zu können, ist sie

ein verständiges Unternehmen; eine Versicherung auf einen Fall bleibt ein Spiel des blinden Glücks.

Der Versicherte hingegen hat hier seine 9200 gewiß, und wenn er nicht versichert, spielt er mit dem blinden Glück.

Wenn zwei Spieler von gleichem Vermögen ein Spiel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gegen einander spielen, bei dem jeder auf jeden Wurf sein halbes Vermögen setzt, so nennt dies die gewöhnliche Rechnung ein ungeheuer gewagtes Spiel, indem jedesmal zwei Würfe hinter einander die vier gleichmöglichen Fälle AA, AB, BA, BB zulassen, mit denen bei der Wahrscheinlichkeit $1/2$ nichts herauskommt (AB, BA) oder ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ einer von beiden ruinirt ist (AA, BB). Bernoulli rechnet dagegen so. Ein Spieler, der 100 besitzt, spiele mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ ein Spiel, in welchem er 50 entweder gewinnt oder verliert. In diesem Fall steht die mathematische Hoffnung weder auf Gewinn, noch auf Verlust, was wird aber die fortune morale? Wir haben $e = 1/2$, $f = 1/2$, $g = o$, $a = 100$, $\alpha = 50$. $\beta = -50$, folglich

$$X = (100+50)^{1/2}(50)^{1/2} = \sqrt{50 . 150} = 50\sqrt{3} = 86, 6.$$

Nach dieser Berechnung brächte die Unternehmung des Spiels dem Spieler eine Gefährdung seines moralischen Vermögenszustandes von etwa 13 Procent, welches auf etwa 6 Procent fällt, wenn man $a = 200$ setzt. Was soll nun diese Belehrung? Die gewöhnliche Rechnung zeigt dem Spieler die Wahrscheinlichkeit $1/4$, daß er nach zwei Spielen ruinirt seyn werde; diese dagegen tröstet ihn, daß er seinen moralischen Vermögenszustand nur auf 87 Procent vermindert habe. Das ist von gar keiner Anwendung.

Solche Geschäfte können nur nach mathematischer Hoffnung richtig geordnet werden, und die ganze moralische Hoffnung ist zu verwerfen, indem sie gegen den mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeit die Sicherheit einzelner Ereignisse und nicht einen Durchschnitt berechnen will.

Ich wage dies zu behaupten, obgleich mir die elegante

Rechnung des Laplace im letzten Abschnitt seines großen Werkes entgegensteht Allein ich sehe nur, daß die elegante logarithmische Rechnung ihn verlockt hat, die Lehre ohne scharfe Berücksichtigung der Anwendungen zu verfolgen. Es bleibt immer ein falscher Gedanke, einem Spieler, der nur eine oder ein paar Partien spielen will, nach Wahrscheinlichkeit einen guten Rath geben zu wollen, ebenso bei einem oder einem Paar Leuten, die Versicherungsverträge abschließen; denn diese handeln immer auf blindes Glück. Laplace will seine Berechnung zum Lobe großer Versicherungsanstalten, besonders zum Ansammeln kleiner Ersparnisse, geltend machen. Aber wozu dies? Die Nachweisung des Vortheils der Sparcasse beruht auf keiner Wahrscheinlichkeit, sondern auf der ganz sichern Zinseszinsenrechnung. Wo der Mensch durch zinsentragende Kapitale das Gesetz der Fruchtbarkeit der Natur nachahmen lernte, da steigen die Größen mit der Zeit nach den Gliedern einer geometrischen Reihe, deren Exponent größer als die Einheit, daher nach und nach mit jenem ungemein raschen Fortschritt, den die Rechnung mit den Waizenkörnern des Schach deutlich macht, der auf dem Schachbrett das erste Feld mit einem, das zweite mit 2 und jedes folgende immer mit dem Doppelten des letzten belegen sollte, aber bald fand, daß seine Speicher dafür nicht auslangten. Bei allen Versicherungsanstalten aber kommt zu diesen hinzu, daß, wenn im Einzelnen auch der Tod noch so ungleich wegrafft, der Feuerschaden, der Hagelschlag noch so ungleich trifft, doch im Ganzen einer großen Gesellschaft und im Durchschnitt vieler Jahre die Unglücksfälle in einem festen Verhältniß bleiben, also nach fester mathematischer Hoffnung berechnet werden können, so daß eine große Versicherungsbank ein sicheres Geschäft hat und den Einzelnen gegen billigen Einsatz sicher stellen kann. Lacroix *) sagt schon ziemlich bestimmt, daß die Theorie des Bernoulli zu sehr auf einzelne Fälle und nicht auf Durchschnittszahlen Rücksicht nehme. Allein mir scheint die Sache noch schlimmer,

---

*) L. c. ed. 2. p. 142 etc.

mir scheint die Hauptgleichung für die **mensura sortis** nämlich

$$Y = k \left(e \log. \frac{a+\alpha}{a} + f \log. \frac{a+\beta}{a} + g \log. \frac{a+\gamma}{a}\right)$$

falsch entworfen zu seyn. Die relative Wichtigkeit eines unsichern Gewinnes oder Verlustes für den Einzelnen kann ja doch auf die wahrscheinliche absolute Größe desselben keinen Einfluß haben, dieser scheint mir aber in jener Formel gestattet zu werden. Wenn Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten e, f, g die Summen α, β, γ bringen sollen, so ist doch daraus der wahrscheinliche Gewinn oder Verlust $(e\alpha + b\beta + g\gamma) = x$, und also falls das frühere Vermögen = a war, der wahrscheinliche Zustand desselben $a + e\alpha + b\beta + g\gamma$, der relative Werth desselben $= \frac{a+x}{a}$ und dessen Wichtigkeit $Y = k \log. \frac{a+x}{a}$. So kommt $X = a + x = a + e\alpha + b\beta + g\gamma$, das heißt gleich dem früheren Vermögen und der mathematischen Hoffnung zusammengenommen. Wenn wir also gleich $Y = k \log. \frac{a+x}{a}$, als Abschätzung der relativen Wichtigkeit von Gewinn und Verlust gelten lassen, so folgt doch daraus kein Unterschied zwischen mathematischer Hoffnung und moralischer Hoffnung.

Mit diesem glaube ich die Principien der Theorie der Glücksspiele genügend besprochen zu haben. Die Ausführung dieser Theorien führt auf viele der interessantesten und schwierigsten Aufgaben unsrer Wissenschaft, welche nach den Regeln der combinatorischen Analysis und der Differenzenrechnung zu behandeln die größten Mathematiker so viel Kunst und Scharfsinn verwendet haben. Am reichsten ist darin das große Werk des Laplace; gute Beispiele gibt Lacroix §. 46—60, und interessante Erläuterungen dazu Unger in der deutschen Bearbeitung; Ausführlicheres aber findet sich im mathematischen Wörterbuch von Klügel, Mollweide und Grunert, Artikel: Wahrscheinlichkeitsrechnung Seite 916 bis 964. Wir haben zum Beispiel für die Einrichtung des Lotto von Genua die

einfachen Durchschnitte für die mathematische Hoffnung genommen, wobei aber für den einzelnen Fall so gerechnet wird, als ob jedes Ereigniß nur einmal vorkäme. Zum Beispiel für den einfachen Auszug stehen 5 Nummern gegen 90, ein solcher Auszug hat also $^{5}/_{90} = ^{1}/_{18}$ der gleichmöglichen Fälle für sich als seine Wahrscheinlichkeit, und wir sagen im Durchschnitt werden immer in 18 Ziehungen alle Nummern herauskommen. Aber was bedeutet dieser Durchschnitt? Rechneten wir genauer, so zeigt sich, daß ich zwischen 85 und 86 Ziehungen brauche, um die Wahrscheinlichkeit $^{1}/_{2}$ zu erhalten, daß jede Nummer wenigstens einmal gezogen sei. So ist der bestimmtere Verlauf jedes Spieles sehr künstlich mit der Rechnung zu verfolgen, da aber meine Absicht nur auf die Kritik der Principien geht, will ich dafür keine Beispiele wiederholen. Ich füge nur die Bemerkung bei, daß diese schwierigern Rechnungen gar nicht in den geringen Interessen der Glücksspiele selbst, sondern nur in denen des mathematischen Scharfsinns unternommen werden; für den Spieler ist nichts damit zu gewinnen.

Zweites Kapitel.

Ueber die Bedeutung der Gesetze für die Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Anwendung im Allgemeinen.

§. 26.

Unsere berechneten allgemeinen Formeln für die Wahrscheinlichkeit a posteriori haben ein Gebiet leichter Anwendung, wenn wir nämlich ein Glücksspiel nach der Analogie der Ziehung von Kugeln aus Urnen, wobei die gezogenen immer wieder eingelegt werden, ordnen wollten. Aber diese Anwendung ist es nicht, welche wir hier suchen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung soll uns hier vielmehr die Beobachtungen ordnen lehren, um solche Naturgesetze zu errathen, bei

denen viele der Rechnung nicht zu unterwerfende Ursachen auf eine im Einzelnen sehr veränderliche Weise den Erfolg bestimmen, aber im Ganzen doch innerhalb bestimmter Schranken gleichmäßig fortwirken. So wirken viele veränderliche Ursachen auf die Erfolge der Geburten, Heirathen und Sterbefälle der Menschen in den einzelnen Theilen des Volkes. Aber Jahr aus Jahr ein lebt die ganze Gesellschaft mit gleichbleibenden Bedürfnissen unter gleichen Sitten. Jahr aus Jahr ein geht das Volk in gleicher Weise in die Kirche, auf den Markt, vor Gericht, nach den Orten der Vergnügung und Erholung. So wird die ganze Lebensbewegung im Volke unter gleicher bleibenden Verhältnissen gefunden werden. Durch regelmäßig fortgesetzte Beobachtungen werden sich daher Durchschnittszahlen für jährliche Geburten, Heirathen, Sterbefälle im Ganzen und in einzelnen Abtheilungen des Volkes bestimmen lassen, nach denen man die nächste Zukunft mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vorausbestimmt. Andere Beispiele liegen in bestimmten Unternehmungen der Menschen. Jährlich gehn aus einem Volke eine bestimmte Anzahl Wallfischfänger in gewisse Meere. Die Geschicklichkeit, das Glück und die Gefahren der Einzelnen werden sehr verschieden und keiner Rechnung zu unterwerfen seyn. Aber im Ganzen werden, ein Jahr, ein Schiff ins andere gerechnet, der Gewinn und die Unglücksfälle innerhalb bestimmter Schranken sich mehr oder weniger gleich bleiben. Wir werden gewisse Durchschnittszahlen für Gewinn und für Unglücksfälle zu bestimmen im Stande seyn, nach denen sich das Geschäft in Rücksicht der zu erwartenden Ausbeute und der Höhe der Assecuranz-Procente für die nächste Zukunft ungefähr überschlagen läßt. Ganz ähnlich stehen die Gesetze der Wetterveränderungen und viele andere Naturgesetze.

Setzen wir an einem Orte die Barometerbeobachtungen einige Jahre lang fort, so werden sich die störenden Einwirkungen der Witterung aufheben, und der mittlere Barometerstand wird nun der Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel entsprechen. Setzen wir die Beobachtungen der Fluthhöhen

an einer Küste nur ein Jahr lang fort, so werden sich die störenden Einwirkungen der Winde ausgleichen und die mittlere Höhe der Theorie der Anziehungen von Sonne und Mond verbunden mit dem Gesetz der constanten Meeresströmungen folgen.

Diese Art von Durchschnittsrechnung suchen wir also hier. Dafür wird es aber nothwendig sein, erst einmal im Allgemeinen zu bedenken, was wir an der aufgestellten reinen Theorie eigentlich besitzen und wie sie sich anwenden lasse.

Bei den a priori bestimmten Wahrscheinlichkeiten ist die Hauptsache leicht klar, wir lernen dort überschlagen, welchen Erfolg wir im Durchschnitt bei fortgesetzten Beobachtungen zu erwarten haben, und welche Abweichungen dazwischen vorkommen können. Wenn wir aber auch hier die Anwendung grade nur auf einen einzelnen Fall machen wollen, so müssen wir schon genauer bedenken, wie weit unsre Zahlen Bedeutung behalten. Sagten wir, du hast die Wahrscheinlichkeit $1/6$ mit einem Würfel grade die 4 zu treffen, so heißt das, im Durchschnitt wird unter 6 Würfen immer einmal die 4 getroffen werden. Aber nun grade nur für diesen einen Wurf? Ja, da weiß ich gar nicht, welcher von den 6 möglichen Fällen eintreffen wird. Dies will wohl beachtet seyn. Denn gehen wir nun zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori über, so finden wir bei ihr einzig den Satz von objectiver Gültigkeit, daß, je länger wir die Beobachtungen in einer bestimmten Sphäre fortsetzen, wir die Ereignisse im Durchschnitt um so genauer in den Verhältnissen finden werden, in welchen die Zahlen der für sie stattfindenden gleichmöglichen Fälle stehen. Alles übrige, einzelne Fälle oder auch allgemeine Uebersichten Treffende ist nur von subjectiver Bedeutung. Nehmen wir unser einfachstes Beispiel. Ich weiß, daß 4 Kugeln im Gefäß sind, von denen jede entweder weiß oder schwarz ist, auch daß eine davon weiß und eine schwarz sei, welches von diesen beiden aber bei den beiden übrigen stattfinden werde, weiß ich nicht. So bleiben mir drei Voraussetzungen, beide weiß, beide schwarz, eine

weiß und eine schwarz zum Rathen übrig, und auf die Zahl dieser Voraussetzungen gründe ich meine Rechnung. Allein dies gibt objectiv keine gleich möglichen Fälle, da ist vielmehr eine dieser Voraussetzungen wahr und die andern sind falsch. Meine Eintheilung gründet sich nur auf den Mangel meiner Kenntniß von der Sache, sie wird weder für den einzelnen Fall, noch im Durchschnitt die Sache näher zu bestimmen im Stande seyn, — sie kann vielmehr überhaupt nur gebraucht werden, um das Pari einer Wette zwischen gleich Unwissenden richtig zu stellen.

Ebenso zeigt uns auch unsere elegante letzte Rechnung allerdings eine ganz richtige mittlere Wahrscheinlichkeit. Aber wessen Durchschnitt wird denn genommen? Offenbar nur der meiner Unwissenheit in der Sache in der weitesten Ausdehnung! Ich beobachte eine Reihe wechselnder Erscheinungen, deren Gründe ich gar nicht kenne, und will nun aus dieser Beobachtung, ohne daß es mir irgend möglich ist, über die Gründe dieser Erscheinungen eine Untersuchung anzustellen, eine Vermuthung über ihre Fortsetzung wagen. Hier bleibt mir freilich nichts übrig, als für die Gründe dieses Erfolges aus der Reihe aller möglichen Wahrscheinlichkeiten von unendlicher Unwahrscheinlichkeit bis zur vollen Gewißheit einen mittleren Werth zu suchen. Allein, wer heißt mich so räthseln? Ist nicht das einzig Besonnene, was ich bei der Sache thun kann, wenn ich die Gründe der Erscheinung nicht kenne, zu sagen: ich weiß nicht, wie es weiter gehen wird? Auch diese mittlere Wahrscheinlichkeit mit ihren Formeln könnte in der That nur taugen, um eine Wette unter gleich Unwissenden zu ordnen, und auch dies würde nur für Durchschnittswerthe Bedeutung gewinnen.

Wir müssen uns also sehr hüten, keine falschen Anwendungen dieser Rechnung zu machen. Hier ist es, wo ich bestimmt der französischen Logik des Wahrscheinlichen zu widersprechen habe. Da diese nämlich, so wie Condorcet vorzüglich sie ausbildete und namentlich Laplace und Lacroix ihr folgen, nach Hume's Meinung alle unsre Kenntniß von

Gesetzen der Bewirkung nur von der Zusammenzählung gleichförmiger beobachteter Erfolge ableiten will, so verwandelt sie fälschlich alle unsre Inductionen in solche Zusammenzählungen und wendet ihre Formeln auf Wahrscheinlichkeiten an, welche gar nicht zu den berechenbaren gehören.

So z. B. geben sich diese Lehrer die Frage: wie wahrscheinlich ist es, daß die Sonne morgen wieder aufgehen wird? und behandeln sie nach der Formel $\frac{m+1}{m+2}$, welche die mittlere Wahrscheinlichkeit enthält dafür, daß die Reihe von m gleichen, ununterbrochen sich folgenden Ereignissen noch um 1 fortgesetzt werde. Seit 6000 Jahren, also an 2191500 Tagen ist der Sonnenaufgang bisher beobachtet worden, wir haben also die Wahrscheinlichkeit $\frac{2191501}{2191502}$ für uns, daß wir uns auch in der Erwartung auf morgen nicht täuschen werden. Allerdings wird dann dazu bemerkt, daß andere Gründe diese Wahrscheinlichkeit noch viel höher brächten; allein ich erwiedere: Eure Zahlen haben hier gar keine Bedeutung! und wenn das ist, so soll man nicht erst rechnen. Die Bedingung jener mittleren Wahrscheinlichkeit war ja, daß man die Gründe der Reihe von Erscheinungen, die in Frage steht, gar nicht kenne, und dies paßt auf die Erscheinungen der Sonne nicht. Jene Naturlehrer wollen damit andeuten, welche Sicherheit die Wahrscheinlichkeit uns immer noch gebe, wenn wir auch nicht zur vollen Gewißheit gelangen können. Aber eben hierin täuscht die Rechnung. Jene Wahrscheinlichkeit ist ja kein kleinster Werth der Sicherheit, sondern nur ein mittlerer, der eben so leicht zu groß, als zu klein ausfällt.

Diese Wahrscheinlichkeitsbestimmungen a posteriori sind nur ganz von subjectiver Bedeutung. Objectiv genommen bleibt uns kein anderer Gewinn dieser Formeln, als der Satz, den Poisson das Gesetz der großen Zahlen (la loi des grands nombres) nennt, daß hinlängliche Vervielfältigung der Beobachtungen uns zu sichern Durchschnittszahlen einer mittleren Wahrscheinlichkeit führe. Aber für die objectiven Bestimmun-

gen von Naturgesetzen durch mathematische Induction bedürfen wir der künstlichen analytischen Formeln nicht, und wie weit wir in bestimmten Gebieten der Beobachtung die Erfahrungen ausbreiten und vervielfältigen müssen, um darin einen gewissen Grad der Sicherheit zu erhalten, lehrt diese Rechnung nicht. Damit werden wir immer auf philosophische Inductionen zurückgewiesen. Die Beobachtung einer gewissen festen Regelmäßigkeit der Erscheinungen wird uns nach Maaßgabe der jedesmal vorliegenden leitenden Maximen mehr oder weniger zu einer philosophischen Induction drängen, in der wir ein festes Gesetz dieser Erscheinungen zu errathen suchen, aber zur genaueren Erörterung dessen wird uns eben die Wahrscheinlichkeitsrechnung selten bedeutenden Vorschub thun, und wo dies auch der Fall ist, dürfen wir doch den Ueberschlag der Wahrscheinlichkeitsrechnung nie mit der Induction selbst verwechseln. Diese Rechnung bestimmt hier nie das gesuchte Gesetz, sondern kann uns nur anregen, dasselbe durch Induction zu suchen *). Nehmen wir zur Erläuterung ein glücklicheres Beispiel. Wir werden veranlaßt, ein festes Gesetz der Entstehung unsers Planetensystems zu vermuthen, weil alle Kreisbewegungen in ihm in einer Richtung erfolgen, weil die Neigung der Planetenbahnen gegen einander (nur die der Pallas ausgenommen) kaum den zehnten Theil des Quadranten einnimmt, weil endlich die Entfernung der Planeten von der Sonne regelmäßig nach der Verdoppelung der Abstände von der Bahn des Merkur geordnet und die Eccentricitäten aller Bahnen so gering sind. Hier können wir nun für die erste Thatsache die Rechnung stellen. Dabei berufen sich Laplace und Lacroix auf die Gesetze unsers §. 18. mit dieser besondern Ausführung.

Wenn in Reihenfolgen wechselnder Erscheinungen eine Art des Erfolges sich öfter als andere zeigt, so entsteht die Frage, ob wohl eine bestimmte Ursach in der Natur vorauszusetzen sei, welche diese Art des Erfolges vor dem Gegentheil

*) Vergl. mein System der Logik, §. 105, 1.

begünstige. Z. B. man findet, daß im Durchschnitt mehr Knaben als Mädchen geboren werden, daß im Durchschnitt die Frauen älter werden, als die Männer, und man fragt nun, ist dieser Erfolg unserer Beobachtung nur für zufällig zu halten, oder wie wahrscheinlich ist es, daß ihm ein bestimmtes Gesetz zu Grunde liege. Wäre dies Letztere, so würde begreiflich die einfache Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses größer als $1/2$ seyn. Wir fragen daher, wie wahrscheinlich dies sei, und erhalten die Antwort durch die letzte Formel in §. 18. 19. 2.), wenn wir in ihr die Grenzen $1/2$ und 1 setzen, das heißt die Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{{}^{(m,\,n)}S_1 - {}^{(m,\,n)}S_{1/2}}{{}^{(m,\,n)}S_1} = 1 - \frac{{}^{(m,\,n)}S_{1/2}}{{}^{(m,\,n)}S_1}.$$

Diese Formel wird ungleich einfacher, wenn nur eine Art der Erscheinungen wiederholt beobachtet wurde, dann ist $n = o$, und wir haben $1 - \frac{{}^{m}S_{1/2}}{{}^{m}S_1} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}}$, welches schnell der Einheit sehr nahe kommt.

Auf ähnliche Art können wir auch fragen, wie wahrscheinlich es sei, ob, wenn in vielen Ziehungen immer dieselbe Farbe traf, doch noch in irgend einem Verhältniß Kugeln von anderer Farbe da seyen. Hier haben wir, wenn m Ziehungen gemacht sind und a der Bruch ist, welcher andeutet, auf wie viele Kugeln noch eine von anderer Art zu erwarten sei, die geforderte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{{}^{(m)}S_1 - {}^{(m)}S_a}{{}^{(m)}S_1} = 1 - \frac{{}^{m}S_a}{{}^{m}S_1} = 1 - a^{m+1}.$$

Sei $a = \frac{100}{101}$ und $m = 999$, so ist a^{m+1} nur $= \frac{1}{20960}$ und für $m = 9999$ nur $= 1$ dividirt durch eine Zahl von 44 Ziffern, deren höchste 1637 sind.

Dies hat nun für subjective Wahrscheinlichkeit seine klare Bedeutung. Jene Lehrer sagen aber hier: bei der gleichförmigen Erscheinung von m Erfolgen haben wir die Wahrschein-

lichkeit $= \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}}$ dafür, daß die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses über $\frac{1}{2}$ betrage, und wenden wir dies auf die Rechtläufigkeit der 11 Planeten an, so wird dieser Werth $= \frac{2^{12} - 1}{2^{12}} = \frac{4095}{4096}$. Nach derselben Rechnungsart würden die 7 dem Gesetz der Verdoppelung folgenden Abstände der Planetenbahnen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2^8 - 1}{2^8}$ $= \frac{255}{256}$ geben. Ich gebe zu, daß dies allerdings die regelmäßigste Art ist, die Sache in Rechnung zu nehmen, allein mir scheint sie das, was uns bestimmt, hier ein festes Gesetz des regelmäßigen Erfolges zu vermuthen, nicht in das rechte Licht zu stellen. Diese Rechnung gibt uns nur das Maaß der Wahrscheinlichkeit, daß diese m fache Folge derselben Erscheinung doch wohl in jedem einzelnen Ereigniß irgend etwas mehr mögliche Fälle für als wider sich gehabt habe, und dies eigentlich nicht bestimmt für unsre m fachen Ereignisse, sondern als einen mittlern Durchschnitt dafür, wenn sehr oft solche m fache Ereignisse in verschiedener Weise beobachtet würden. Wir aber setzen hier in unsern Beurtheilungen eigentlich den nothwendigen Erfolg nach einem Naturgesetz, und das zufällige Zusammentreffen im wechselnden Spiel vieler gleichmöglicher Fälle vergleichend gegen einander. Wir sagen dann: wäre die Richtung der Planetenbewegung bei der Entstehung des Sonnensystems ein zufälliger Erfolg gesondert für jeden einzelnen gewesen, so hätte jeder eben sowohl rückläufig als rechtläufig seyn können, und dies ließe 2^{n} verschiedene mögliche Fälle zu, von denen der wirklich beobachtete nur einer ist. Also bei dieser Voraussetzung wäre $2^{11} - 1 = 2047$ gegen eins zu wetten, daß dieser Erfolg nicht eintreffen werde,

seine Wahrscheinlichkeit wäre nur $\frac{1}{2048}$. Die andere Voraussetzung hingegen gibt diesen Erfolg als den einzig möglichen, und ihre relative Wahrscheinlichkeit gegen jene ist also $\frac{1}{1+\frac{1}{2}^{11}} = \frac{2^{11}}{2^{11}+1} = \frac{2048}{2049}$.

Dieses Uebergewicht der Gründe für ein festes Gesetz regelmäßiger Erfolge läßt aber nur in seltenen Fällen sich auf Zahlen bringen, wo wie bei rechtläufiger und rückläufiger Bewegung nur wenige scharf unterschiedene Fälle für das einzelne Ereigniß gegen einander stehen.

Unser anderer Fall, die regelmäßige Verdoppelung der Abstände, zeigt dies gleich. Hier stehen der Regelmäßigkeit des beobachteten Erfolges eine gar nicht abzählbare Menge möglicher unregelmäßiger Stellungen der Planeten an der Seite, wenn wir ihr Zusammentreffen als zufällig, das heißt als nicht nach einem Gesetz für alle bestimmt halten wollten. Das Uebergewicht unserer Vermuthung über die Voraussetzung einer solchen Zufälligkeit wäre also gar nicht nach Zahlen abzumessen.

Wir mögen uns also immer in Acht nehmen, diese ganze Berechnung der Wahrscheinlichkeit a posteriori nicht gegen die Regeln der Durchschnittsrechnung falsch zu deuten. Wir wollen hier eigentlich die Naturgesetze errathen, welche, als Gesetze der Theilung der Sphäre einer Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegen. Hier haben wir immer eine *philosophische Wahrscheinlichkeit* des Gelingens für uns, daß wir selbst bei dem zufälligsten Wechsel der Erscheinungen (wie der Sterblichkeit der Menschen, des Wechsels der Witterung von Tag zu Tag) doch bei hinlänglicher Fortsetzung der Beobachtungen zu festen mittleren Durchschnitten gelangen werden, um des Gesetzes der Sparsamkeit der Natur willen. Da nämlich in der Natur doch *alle* Wirkungen einer wirklichen Ursach wirklich sind, so muß ja die Anzahl der in einem gewissen Gebiet der Erscheinungen zusammenwirkenden Ursachen nothwendig ein Kleinstes seyn.

Dieses und nicht Bernoulli's Gesetz aus den Potenzen des Polynomium der Wahrscheinlichkeit a priori ist der wahre Grund des Gesetzes der großen Zahlen. Bei allen Veränderungen, welche in einem System von Körpern durch die innern Kräfte desselben bewirkt werden, bleibt nach den Gesetzen der Mechanik der Schwerpunkt des Systems in Ruhe. Analog mit diesem Gesetz ergibt sich dann auch, daß wenn in irgend einem Kreise wechselnder Naturerscheinungen keine der Zeit proportionalen Bewirkungen der Veränderungen stattfinden, sondern alle Ursachen nur mit größeren oder kleineren Ausweichungen innerhalb bestimmter Schranken ihre Veränderungen bringen, bei hinlänglich vervielfältigten Beobachtungen sich constante mittlere Durchschnittszahlen für die Verhältnisse der Erfolge ergeben müssen. Die Weite der Kreise dieser Ausweichungen kann aber jedesmal nur die Beobachtung bringen, ohne daß eine bloße Theorie der Wahrscheinlichkeit darüber etwas bestimmen kann. Es kommt hier in der That nur darauf an, in jedem Gebiete die Beobachtungen so lange fortzusetzen und so weit auszubreiten, bis die Durchschnittszahlen hinlänglich bestimmte Werthe erhalten. Vergleichen wir dagegen hier wieder mit den Kugeln im Gefäß und den Ziehungen, um als Grundlage einer Wahrscheinlichkeit a priori die Verhältnißzahlen der Kugeln nach ihren verschiedenen Arten zu errathen, so können wir freilich alle gegebenen Formeln für mittlere Durchschnittszahlen zu Bestimmung des pari einer Wette unter gleich Unwissenden anwenden, aber nicht, wenn wir nach mathematischer Induction das Naturgesetz der Theilung der Sphäre wirklich errathen wollen.

Für diesen Zweck verlieren die Formeln für die Wahrscheinlichkeit eines nächsten oder einer Reihe nächster Erfolge alle Bedeutung, denn sie messen nicht ab, wie wahrscheinlich es sei, daß jetzt diese Erfolge sich zeigen werden, sondern nur, daß, wenn sehr oft die Erfolge unter denselben Umständen beobachtet würden, im Durchschnitt das Verhältniß so seyn werde, wie die Formel aussagt.

So fallen die Fragen, wie wahrscheinlich ist es, daß die

Sonne morgen wieder aufgeht, mit allen verwandten weg, man könnte eben so gut berechnen wollen: wie wahrscheinlich ist es, daß, wenn ich morgen in meinen Spiegel sehe, ich anstatt meines Gesichtes ein mich angrinzendes Katzengesicht sehen werde? Aber auch im Allgemeinen wird die Beurtheilung anders.

Ich will diese Bemerkung vorzüglich für den Fall ausführen, wo wir aus beobachteten fortgesetzten gleichen Erfolgen auf die Einheit eines Naturgesetzes schließen. Ich sehe auf die Wahrscheinlichkeit zurück, daß unser Sonnensystem nach einem festen Naturgesetz gebildet worden sei, sowie diese sich aus der Rechtläufigkeit aller Kreisbewegungen in diesem System ergab, und behaupte, daß diese Wahrscheinlichkeit eigentlich von philosophischer und nicht rein von mathematischer Bestimmung sei. Ich will es durch ein einfacheres Beispiel erläutern. In einem Gefäß seyen 10 Nummern von 1 bis 10, Jemand ziehe diese eine nach der andern und lege sie, so wie sie sich zufällig zeigen, in einer Reihe auf. Es fragt sich, wie wahrscheinlich ist es, daß, wenn die Nummern in das Gefäß zurückgelegt werden und nun noch einmal gezogen wird, sie in derselben Reihenfolge erscheinen würden. Hier sind so viel gleich mögliche Fälle, als es Versetzungen von 10 Elementen in einer Complexion gibt, das heißt $10! = 3628800$. Also wäre 3628799 gegen 1 zu wetten, daß dieselbe Reihenfolge das nächste Mal nicht erscheinen werde. Dies ist ganz von mathematischer Wahrscheinlichkeit a priori. Nun nehme ich aber den andern Fall. Ich finde die 10 Nummern auf dem Tisch in eine Reihe gelegt in der natürlichen Ordnung der Zahlen von 1 bis 10, und es fragt sich nun, sind sie zufällig so gezogen, oder absichtlich aufgelegt? Da habe ich wieder einen von 3628800 Fällen, aber einer mußte herauskommen und jeder hat die gleiche relative Wahrscheinlichkeit mit jedem andern, die mathematische Wahrscheinlichkeit hat hier also gar keine Entscheidung. Demungeachtet werde ich wieder sagen, es ist fast nach demselben Maaße wahrscheinlich, daß die Nummern absichtlich gelegt und nicht zufällig gezogen sind, denn im ersten Fall hat der wirkliche

Erfolg die volle Gewißheit für sich, im andern nur die Wahrscheinlichkeit $1/_{3628800}$. Allein diese Entscheidung beruht nur auf der philosophischen Entscheidung, daß diese Folge eine so entschiedene Gesetzmäßigkeit für sich habe und ich immer für die Gesetzmäßigkeit zu rathen veranlaßt bin. Wer die Ziffern nicht als unsre Zahlzeichen kennte, würde daher diese Vermuthung gar nicht finden. Ganz derselbe Fall ist es nun auch mit jenem Beispiel der Regelmäßigkeit der Planetenbewegungen. Mathematisch ist der Fall: alle rechtläufig eben auch einer von 2048 gleichmöglichen, davon jeder gleiche Wahrscheinlichkeit hat, und ich schließe auf die einfache Gesetzlichkeit wieder nur aus philosophischer Induction.

Deswegen ist für den naturwissenschaftlichen Gebrauch die Formel des Laplace zu verwerfen und die andere beizubehalten.

Ich will meinen Satz noch schärfer aussprechen. Die ganze Meinung, die Regel einer Wahrscheinlichkeit a priori durch die wiederholten Versuche einer Wahrscheinlichkeit a posteriori errathen zu können, beruht auf einer Irrung der Abstractionen. Die philosophische Induction ordnet sich nach allgemeinen Begriffen und kann dadurch auf allgemeine Gesetze führen, die Reihenfolgen der Versuche für sich bleiben hingegen nur bei einzelnen Begebenheiten.

In der Urne seyen vier Kugeln 1, 2, 3, 4 gezeichnet; man zieht fortgesetzt eine und legt sie wieder ein. Wenn ich nun hier ins Unbestimmte nach Wahrscheinlichkeit a priori voraus rede vom Erfolg sehr vieler Ziehungen, so werde ich sagen, du wirst wahrscheinlich eine Kugel ungefähr so oft treffen, als die andere. Das Spiel geht nämlich nach den Complexionen einer Variation mit Wiederholungen, und je öfter du ziehst, desto mehrere von diesen Complexionen haben nahebei das gleiche Verhältniß aller Kugeln. Wenn ich nun aber wirklich hundertmal gezogen habe, so habe ich eben eine von den 4^{100} möglichen Complexionen ergriffen, von denen jede gleiche relative Wahrscheinlichkeit für sich hat, ich kann also eben so leicht die Complexion lauter 1, als irgend eine

andere treffen, und so kann ich also aus den wiederholten Versuchen allein nie schließen, daß eine Verschiedenartigkeit in den Elementen nicht vorhanden sei, weil ich sie nicht beobachtet habe, wenn mich nicht eine philosophische leitende Maxime führt.

Wenn Laplace den großen Nutzen rühmt, welchen ihm die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Vorbereitung seiner so feinen und wichtigen Entdeckungen in der physischen Astronomie leistete, so fällt ein großer Theil auf die Seite der ganz subjectiven Methode der kleinsten Quadratsummen, die andern Ueberschläge aber, z. B. für die Wichtigkeit der Ausnahmen von einer Regel, was etwa die Ausnahmen, daß zuweilen in einzelnen Departements mehr Mädchen als Knaben geboren werden, gegen das Gesetz austragen, daß im Durchschnitt mehr Knaben als Mädchen geboren werden, ergeben sich immer nur unter der philosophischen Induction für die Regelmäßigkeit der Erfolge.

Laplace zeigt: wenn in einer Urne vier Kugeln sind, von denen ich weiß, sie sind entweder weiß oder schwarz, und es ist eine weiße gezogen, so kann ich 5 gegen 1 wetten, es seyen wenigstens eben so viel weiße als schwarze in der Urne. — Ja, so kann ich wetten in der subjectiven Unbestimmtheit der Sache; aber es folgt daraus objectiv gar nichts darüber, wie die Kugeln im Gefäß beschaffen sind. Nach dieser subjectiven Wahrscheinlichkeit bin ich gar nicht berechtigt, auf ein Naturgesetz zu schließen. Findet sich für eine Wahrscheinlichkeit a priori, daß für jedes Ereigniß eine Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ sei, so weist dies auf ein Gesetz der Bewirkung für diese Ereignisse. Aber die Formel $\frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}}$ mit ihrer nur subjectiven Wahrscheinlichkeit gilt nur zum Wetten.

Gesetzt ich werfe eine Scheibe mit Kreuz und Pfeil wiederholt, so wird es im Voraus höchst unwahrscheinlich, daß, wenn es gleich möglich ist, mit ihr Kreuz oder Pfeil zu treffen, ich 10mal hinter einander Kreuz treffen werde. Nun werfe ich aber wirklich und treffe zehn mal hinter einander

Kreuz, so war bei jedem dieser Würfe nicht nur eine Wahrscheinlichkeit $> 1/2$, sondern die Gewißheit für Kreuz; es waren überwiegende Ursachen für Kreuz. Da fragt sich dann, lagen die Ursachen constant in dem unregelmäßigen Bau der Scheibe, oder nur in der Zufälligkeit, daß ich unter den im Allgemeinen gleichmöglichen Fällen grade diesmal die Scheibe jedesmal für Kreuz ergriff und warf. Schließen wir nun aus solchen Versuchen auf ein allgemeines Naturgesetz, so geschieht dies nur, weil wir constante Ursachen und nicht nur zufällige der Entscheidung voraussetzen. Das heißt, wir schließen nur nach philosophischer Induction, und der andere Ausdruck beruht nur auf der Unbestimmtheit des Begriffes der gleichmöglichen Fälle. (§. IX.)

Meine Behauptung ist am klarsten durch die letzte Formel §. 18. 6.) bestimmt. Wenn ich dort aus m gleichen Erfolgen schließe, daß sie sich noch p mal wiederholen werden, so erhalte ich dafür die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m+1}{m+p+1}.$$

Hier zählt m eine bestimmte Anzahl von Beobachtungen, soll der Erfolg aber durch ein nothwendiges Naturgesetz bestimmt seyn, so wäre p unendlich groß zu nehmen, folglich die Wahrscheinlichkeit für die Gültigkeit des Gesetzes $= 0$. Die Formel erklärt es für unendlich unwahrscheinlich, daß hier Naturgesetze gelten. Diese Berechnung der Wahrscheinlichkeit a posteriori geht also von der Voraussetzung aus, daß in ihrem Bereiche keine nothwendigen Naturgesetze gelten, sondern nur Annäherungen an Gleichförmigkeit der Erfolge. Aber dies ist ganz gegen die philosophische Induction, welche hinter jeder mathematischen Induction steht, nach der wir Naturgesetze zu errathen suchen. Wir setzen jedesmal voraus, daß in der Natur alle Wechsel der Erscheinungen nach nothwendigen Gesetzen erfolgen. Bleiben die Ursachen der Erscheinungen dieselben, so erfolgen auch die Wechsel derselben unabänderlich nach demselben Gesetz. Dieses Gesetz für die jetzt bestehenden Verhältnisse der Ursachen wollen wir

errathen durch die jetzigen Beobachtungen. Kennen wir dieses Gesetz, so werden spätere Beobachtungen andeuten können, ob die Verhältnisse der Ursachen dieselben geblieben sind, oder sich geändert haben. Aus den jetzigen Beobachtungen berechne ich z. B. die Verhältnisse der Sterblichkeit im Volk. Sie werden nothwendig dieselben bleiben für immer, wenn sich die Ursachen der Sterblichkeit nicht ändern, aber über Aenderung dieser Ursachen sagen die jetzigen Beobachtungen gar nichts aus; sie ist gar kein Gegenstand der wahrscheinlichen Berechnung aus ihnen, sondern nur aus der Vergleichung zukünftiger Beobachtungen mit den früheren lassen sie sich erforschen.

Auf eine ähnliche Weise muß ich noch eine andere Betrachtung des Laplace der Kritik unterwerfen. Er sagt: »Man stelle sich eine Reihe kreisförmig geordneter Urnen vor, von denen jede eine sehr große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, aber so, daß die Verhältnisse der weißen zu den schwarzen in den einzelnen Urnen im Anfang sehr verschieden seyn mögen, und z. B. eine nur weiße, eine andere nur schwarze enthält. Nimmt man nun aus der ersten Urne eine Kugel, um sie in die zweite zu legen, schüttelt die zweite, um die hineingelegte mit den schon darin liegenden gehörig zu mengen, zieht dann aus dieser eine Kugel, um sie in die dritte zu legen, fährt so fort bis zur letzten, aus der man wieder eine in die erste legt, und setzt dann diese Reihe von Ziehungen in vielen Wiederholungen fort, so zeigt die Analysis der Wahrscheinlichkeiten, daß die Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln in den einzelnen Urnen zuletzt sowohl unter einander, als auch dem Verhältniß der Summen aller in allen Urnen enthaltenen weißen Kugeln zu der Summe aller in denselben enthaltenen schwarzen Kugeln gleich seyn werden. Durch eine solche regelmäßige Veränderungsweise verschwindet also nach und nach die ursprüngliche Unregelmäßigkeit dieser Verhältnisse, um der einfachen Ordnung Platz zu machen. — Diese Resultate lassen sich auf alle Combinationen der Natur ausdehnen, in welchen die ihre Ele-

mente belebenden beständigen Kräfte regelmäßige Arten von Thätigkeit bewirken, die selbst aus dem Schooße des Chaos bewunderswürdigen Gesetzen folgende Systeme hervorgehen lassen.«

Hier spricht Laplace sehr unklar und zuletzt bestimmt unrichtig. Nicht aus dem Schooße des Chaos gehen bewunderswürdigen Gesetzen folgende Systeme hervor, sondern wir entdecken, wenn wir die Beobachtungen lange genug fortsetzen, daß das anscheinende Chaos ein nach bewunderswürdigen Gesetzen geordnetes Ganzes sei. Es bringt nicht der fortspielende Zufall die bewunderswürdigen Gesetze, sondern wir entdecken, daß das anscheinend Zufällige doch unter festen Gesetzen steht.

Es scheint fast, als setze Laplace hier voraus, daß durch das von ihm beschriebene Spiel allmählich eine gleichmäßige Mengung der verschiedenartigen Kugeln in den Urnen erhalten und festgestellt werde; aber das ist gar nicht der Fall, sondern es lassen nur die Durchschnittszahlen sehr lange fortgesetzter Beobachtungen die richtigen Verhältnisse der Kugeln errathen, während der Verlauf der Ereignisse immer die Wiederholung derselben Wechsel zeigt.

Ich will dies durch die Ausführung deutlicher machen. Es seyen nur 9 Kugeln in drei Gefäßen im Umlauf, so daß jedesmal in jedem drei Kugeln liegen. Da nun jedesmal in 9 Reihenzügen durch jedes Gefäß 9 Kugeln gehen, so müssen in 9 Reihenzügen im Durchschnitt alle Kugeln durch jedes Gefäß gegangen sein, und wenn ich also nur ein Gefäß beobachte, so werde ich im Durchschnitt in 9 Zügen alle Kugeln gehabt haben und folglich das Verhältniß ihrer verschiedenen Arten kennen. Aber was bedeutet dieses im Durchschnitt? Sehr oft wiederholt werden leicht dieselben Kugeln wieder durch mein Gefäß gehen, ehe sie alle an die Reihe kommen. Wie weit das langt, wird durch die Zufälligkeit aller Combinationen im Spiel beurtheilt werden müssen. Nun theilen wir hier immer 9 Kugeln in Combinationen in der dritten

Classe, deren sind im Ganzen $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$, von denen jedesmal 3 liegen. In 28 Zügen werden also im Durchschnitt alle diese Ternen vorkommen. Aber diese Ternen combiniren sich in den drei Gefäßen wieder zu drei, in denen jedesmal jede Kugel nur einmal vorkommt. Greife ich also aus den 84 Ternen eine, etwa 1, 2, 3 heraus, so liegen daneben nur noch 6 Kugeln, welche $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ Ternen geben. Dies giebt $20 \cdot 84 = 1680$ Combinationen der einzelnen Ternen durch die drei Gefäße, aber dabei ist jede für jede ihrer Kugeln, also dreimal gezählt. Wir behalten nur 560 Combinationen, von denen aber jede noch 6 Versetzungen durch die drei Gefäße zuläßt. Das Spiel hat also im Ganzen $6 \cdot 560 = 3360$ Wechselfälle. Um alle Mannichfaltigkeiten dieses kleinen Spiels zu erschöpfen, müssen wir also sehr oft 3360 Reihenzüge hinter einander folgen lassen, werden aber dann durch die Beobachtung nur eines Gefäßes nach und nach das Gesetz des ganzen Spiels errathen. Seyen z. B. die Kugeln von drei Farben, von jeder 3, so werden die 84 Ternen nur 3 einfarbige, 54 zweifarbige und 27 dreifarbige enthalten, und diese werden in beständigem Wechsel wiederkehren.

Die Fortsetzung des Spiels wird also nicht, wie Laplace zu sagen scheint, die Kugeln ordnen, sondern es wird sie immer in denselben Wechseln der Unregelmäßigkeit fortspielen lassen, und nur die Durchschnittszahlen werden nach und nach genauer das einfache Grundverhältniß geben.

Setzen wir nun hier der bestimmenden unabhängigen Elemente nach und nach mehrere, so werden die Combinationen bald zu sehr großen Zahlen führen, und also für den Durchschnitt eine sehr lange Fortsetzung des Spiels fordern.

Es seyen der Gefäße 10, der Kugeln 1000, in jedem Gefäß 100, so ist die Zahl der Combinationen der 1000 Kugeln in der hundertsten Classe zu suchen $= \frac{901 \cdot 902 \ldots 999 \cdot 1000}{10!}$.

Nach diesen ungeheuern Zahlen müßten hier die Wiederholungen der Versuche für die sichern Durchschnitte gezählt werden. Aber soviel fordert die Natur nirgends von uns. Ihre unabhängigen Elemente sind von weit geringerer Zahl, und daher werden weit kleinere Beobachtungsreihen hinlangen, um sichere Durchschnittswerthe zu bestimmen.

Laplace fängt diese ganze Betrachtung mit folgenden Worten an: »Mitten unter den veränderlichen und unbekannten Ursachen, die man unter dem Namen Zufall begreift, und durch welche der Gang der Begebenheiten ungewiß und unregelmäßig wird, sieht man, je mehr sie sich vervielfältigen, eine auffallende Regelmäßigkeit entstehen, die von einem Plane abzuhangen scheint, daher man sie als einen Beweis der die Welt regierenden Vorsehung angesehen hat. Denkt man aber weiter darüber nach, so ergibt sich bald, daß diese Regelmäßigkeit nur die Entwicklung der gegenseitigen Möglichkeiten der einfachen Erscheinungen ist, die sich um so häufiger darstellen, je wahrscheinlicher sie sind.«

So spielt er auf den Streit der Stoa mit Epikuros an, um πρόνοια (Vorsehung), εἱμαρμένη (Schicksal) und τύχη (Zufall). Aber die Frage nach der Vorsehung gehört nicht hierher, denn auf die Vorsehung kann man nicht jede Regelmäßigkeit deuten, sondern nur die, die uns gefällt, die wir für gut halten. Hier ist nur der Streit um Schicksal (Naturnothwendigkeit nach Gesetzen), oder Zufall (Gesetzlosigkeit). Und da scheint Laplace die Sache falsch zu fassen, indem er aus dem Zufall die Regelmäßigkeit bei häufiger Wiederholung der Ereignisse will hervorgehen lassen, während doch die Regelmäßigkeit umgekehrt schon vor dem Zufall bestimmt ist durch die Anzahl der unabhängigen Elemente, in deren Combinationen der Zufall spielt. Die Regelmäßigkeit ist um so einfacher, je geringer diese Zahl der Elemente. Die gegenseitigen Möglichkeiten der einfachen Erscheinungen erzeugen nicht die Regelmäßigkeit, sondern sind grade die Folge des Gesetzes, nach dem die unabhängigen Elemente der Combination zusammenkommen.

Die Anwendung dieser Formeln auf die Beobachtung, z. B. bei Sterblichkeit und Bevölkerung geschieht aber in der That auch nur nach der Analogie bei jenem Spiel der Kugeln durch die Urnen, daß man mit der hinlänglich fortgesetzten Beobachtung einer Urne die Verhältnisse des Ganzen finden könne.

So räth Laplace, anstatt einer allgemeinen Volkszählung, nur Geburts- und Sterbelisten anzufertigen, und daneben nur in gut ausgewählten Landestheilen nach Klima und Sitte, die als ein gleichförmiger Theil des Ganzen gelten können, die ganze Gesellschaft zu zählen und damit die betreffenden Geburts- und Sterbelisten zu vergleichen, um nach den Verhältnissen der Geburts- und Sterbefälle zur ganzen Gesellschaft in den ausgewählten Theilen die Bevölkerung des ganzen Landes zu bestimmen.

Wenn wir dagegen die Naturgesetze selbst nach der Weise des Spiels mit den Kugeln in der Urne errathen wollten, würden wir nie zu einer bestimmten Entscheidung kommen. Die Lehrer wollen hier alle, wie Hume, wissen, daß sich kein Wunder, keine Begebenheit im Widerstreit mit Naturgesetzen ereignen könne. Aber was ist denn mit einem Naturgesetz in Widerstreit?

Algazel meinte, wenn Gott es schon nicht will, so bleibt es doch möglich, daß ich, wenn ich von einer Reise heimkehre, meinen Sohn in ein Pferd verwandelt wiederfinde. Und er hat ganz recht; logisch möglich ist dies; es enthält keinen Widerspruch in sich, sondern es widerstreitet nur physisch den Naturgesetzen. Aber wie will ich dies letzte behaupten? Gesetzt, die Begebenheit, daß ein Junge in ein Pferd verwandelt würde, gliche dem Zug einer weißen Kugel aus einer Urne, welche neben einer Trillion schwarzer Kugeln nur eine weiße enthielte; wie wollte ich entscheiden, ob diese eine weiße Kugel vorhanden ist? Auf der Erde leben etwa tausend Millionen Menschen, und etwa in dreißig Jahren geht ein Geschlecht vorüber; könnte ich alle diese beobachten, so würde ich in dreißig Jahren 1000 Millionen Beobachtungen

machen, müßte die Beobachtungen etwa 20000 Millionen Jahre lang fortsetzen, um nur die Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu erlangen, die weiße Kugel einmal fallen zu sehen *). Auf diese Weise wird also nie ein Naturgesetz sicher gestellt, denn was neben einem angeblichen Gesetz noch möglich bleibt, kann sich eben so wohl morgen, als nach Jahrtausenden zutragen.

Dies Alles wohl erwogen, scheint mir zu folgen, daß die mathematische Induction, nach welcher wir die Verhältnißzahlen gewisser Begebenheiten bestimmen, gar nicht nach diesen Formeln der Wahrscheinlichkeit a posteriori, sondern viel einfacher nur nach der Zusammenzählung der Beobachtungen und ihrer Durchschnittszahlen bestimmt werden könne.

Deswegen kann ich hier auch das Spiel mit den Kugeln in der Urne nicht unmittelbar als Schema brauchen, sondern die Beurtheilung wird vorherrschender durch philosophische Induction bestimmt. Gesetzt es sei genau festgestellt, daß in einem Lande immer im Durchschnitt auf 21 Mädchen 22 Knaben geboren werden, so kann die Unregelmäßigkeit im Beson-

*) Es fragt sich nämlich hier, in wie viel Ziehungen = m erhalte ich die Wahrscheinlichkeit $1/2$ einmal B zu treffen, wenn nur A und B in gewissen Verhältnissen c für B, f für A vorhanden sind.

Wir haben $1/2 = 1 - f^m$; $1/2 = f^m$; $\log. 1/2 = m \log. f$;

$$m = \frac{\log. 2}{\log. \frac{1}{f}} = \frac{0{,}3010300}{\log. \frac{1}{f}}$$

Setzen wir:

$c = \frac{1}{10}$; $f = \frac{10}{11}$ so ist $\log. \frac{1}{f} = 0{,}0413927$; $m = 7{,}27$.

$c = \frac{1}{100}$; $f = \frac{100}{101}$; $\log. \frac{1}{f} = 0{,}0043214$; $m = 69{,}4$.

$c = \frac{1}{1000}$; $f = \frac{1000}{1001}$; $\log. \frac{1}{f} = 0{,}0004341$; $m = 693$.

$f = \frac{10000}{10001}$; $\log. \frac{1}{f} = 0{,}0000434$; $m = 6930$

Gehen wir so fort bis auf c gleich einem Trillionantheil, so wird m = 693000 Billionen. Dies mit tausend Millionen dividirt und mit 30 multiplicirt, bringt endlich die 20790 Millionen Jahre.

dern freilich nicht größer werden, als sie das Spiel mit nur 21 weißen und 22 schwarzen Kugeln in der Urne möglich läßt; aber dabei bleibt unbestimmt, ob die Abweichungen von dem mittlern Durchschnitt nicht bei weitem kleiner bleiben müssen, schon nach dem Naturgesetz der Geburten. Ich behaupte also, daß wir die Verhältnißzahlen einer mittleren Wahrscheinlichkeit a posteriori, wie wir sie für die Verhältnisse der Sterblichkeit der Menschen, der Gefahr einer Unternehmung u. s. w. durch fortgesetzte Beobachtungen erhalten, kraft einer philosophischen Induction für die Gesetzmäßigkeit der Erscheinungen und nicht aus zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeit a priori ableiten.

Deswegen werden wir bei diesen Lehren nie berechtigt seyn, die Betrachtungen nach den Potenzen des Binomium oder Polynomium der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit a priori zu leiten, sondern in jedem Gebiete nur nach sorgfältiger Fortführung der Beobachtungen.

Die Gesetze der Wahrscheinlichkeit a posteriori haben sonach nur zwei große Gebiete ihrer Anwendungen, nämlich nach der Methode der kleinsten Quadratsummen für die Bestimmung den mittleren Werthe bei ungenauen Beobachtungen und unter dem Gesetz der großen Zahlen, mit Poisson zu reden. In Erweiterung des Lehrsatzes von Jacob Bernoulli (§. 12.) hat nun Poisson alle Kunst der Analysis aufgeboten, um einen allgemeinen Beweis desselben zu geben. Es scheint mir aber diese Mühe unnöthig und für die Anwendung nicht von Erfolg. Denn das so künstlich Nachgewiesene ist doch nur die Folge des Gesetzes der Sparsamkeit der Natur und zugleich von philosophischer Einsicht, und für die Anwendung hilft uns die genaue mathematische Ausführung nichts. Es kommt ja nur darauf an, mit wie vielerlei Kugeln in der Urne wir jedesmal zu vergleichen haben, und was uns anfangs wundert, ist nur, daß wir bei dem Spiele der Naturereignisse meist nur mit so wenig Arten zu vergleichen haben, wie z. B. bei den Zufälligkeiten im Menschenleben. Aber eben bei dem Verfolge dieser Beobachtungen ha-

ben wir es immer nur mit einer einfachen Durchschnittsrechnung zu thun, wobei die künstlichen Formeln nicht concurriren. So beweist es dann das Werk des Poisson. Die leichtverständlichen Anwendungen des Gesetzes der großen Zahlen werden schon klar und man sieht sie ein durch das, was er ohne Rechnung auf wenigen Seiten des Vorwortes gegeben hat.

Dieser mein ganzer Streit gegen die französischen Mathematiker hat zweierlei Zwecke, nämlich einmal die Ungültigkeit solcher Berechnungen mittlerer Wahrscheinlichkeiten zu behaupten, bei denen nicht subjectiv mittlere Werthe bei ungenauen Beobachtungen, sondern objectiv bedeutsame Durchschnittszahlen geprüft werden sollen, und dann die ganze, der Erfahrungsphilosophie gehörende Theorie der Induction.

Zum Beispiel für das erste nehme ich eine Berechnung des Laplace. Die dreijährigen Beobachtungen von 1799 bis 1802 der Einwohnerzahl, Geburten und Sterbefälle in 30 ausgewählten Departements mit einer mittleren Einwohnerzahl von 2037615 Menschen geben das Verhältniß der Geburten zur Einwohnerzahl wie 1 : 28,353. Im ganzen damaligen französischen Gebiete war dann die Zahl der jährlichen Geburten 1500000, und darnach berechnet die Einwohnerzahl 42500000. Dabei berechnet nun Laplace nach unsern Formeln der mittleren Wahrscheinlichkeit, er könne 1161 gegen 1 wetten, daß er sich in der letzten Angabe nicht um mehr als eine halbe Million mehr oder weniger geirrt habe. Dagegen erinnere ich aber, diese ganze Rechnung ist nur scheinbar. Denn, die Richtigkeit der Tabellen vorausgesetzt, beruht ja die Genauigkeit der letzten Angabe nur darauf, wie genau die Bevölkerungsverhältnisse der 30 ausgewählten Departements denen des ganzen französischen Gebietes proportional seyn mögen, und dafür liegen keine Angaben zur Berechnung vor, sondern eine hinlängliche Genauigkeit dessen ist unmittelbare Voraussetzung.

Ein anderes Beispiel giebt die Beobachtung, daß in den letzten Jahren für ganz Frankreich die Zahl der männlichen

Geburten zu den weiblichen wie 17 : 16. Wollten wir nun mit Laplace dafür nach unsern Formeln berechnen, wie wahrscheinlich es sei, daß dies Verhältniß noch ein oder einige Jahre unverändert bestehen werde, so gäbe dies eine eben so trügliche Rechnung.

Frankreich scheint groß genug, daß sich in ihm die Zufälligkeiten in den Wechselfällen der Geburten im Durchschnitt eines Jahres schon nahebei ausgleichen. Jenes Gesetz beruht also auf dem jetzt bestehenden Naturgesetze der Zeugung im französischen Volk; soll es sich ändern, so muß dies durch eine Aenderung in den letztgenannten Naturgesetzen bestimmt werden, sowie diese von der Zeugungskraft, den Sitten und der ganzen Lebensweise im Volke abhängen. Aber von alle dem liegt ja nichts in den Thatsachen, die unserer Rechnung zu Grunde liegen.

Endlich mein letzter Spruch ist hier wieder der allgemeine gegen die sensualistische Theorie der Inductionen. Lacroix sagt *), zwischen dem falschen Pyrrhonismus und dem eben so unzulänglichen absoluten Dogmatismus habe, um die Ursachen wechselnder Naturerscheinungen zu erforschen, zuerst Helvetius einen gradweisen Skepticismus (scepticisme gradué) gestellt, welchen Condorcet vorzüglich rühme und der die allein richtige Methode enthalte. Eben diesem sollen die hier aufgeführten Gesetze der mittleren Wahrscheinlichkeit dienen. Aber dagegen stehen alle meine Nachweisungen. Die bloße Wiederholung derselben Reihe von Erscheinungen entscheidet nie ein Naturgesetz, wenn der Beobachtung nicht die höheren leitenden Maximen der Wissenschaft zu Hülfe kommen, deren Hauptstärke in der Einsicht in die nothwendigen Wahrheiten der Mathematik beruht.

Bei der Anwendung dieser unrichtigen Theorie der Induction auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt dann der Grund der Irrung darin, daß die mathematische Abstraction der in gleichmögliche Fälle getheilten Sphäre, deren An-

*) a. a. O. §. 103.

wendung wir bei den Glückspielen willkührlich selbst bestimmen, auf alle Arten mittlerer Wahrscheinlichkeiten, die von den Naturgesetzen selbst abhängen, angewandt wird.

Drittes Kapitel.

Anwendungen der Wahrscheinlichkeit a posteriori auf Bevölkerung, Sterblichkeit der Menschen und alle Arten von Versicherungsanstalten.

1) Versicherungsanstalten im Allgemeinen.

§. 27.

Diese Gegenstände der politischen Arithmetik gehören zu den wichtigsten Anwendungen der unbestimmten Durchschnittsrechnung. Die Mathematik bietet dafür zwei Grundlagen an, nämlich die Zinseszinsenrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung a posteriori. So sind die Lehren von drei Arten, es wird entweder nur das erste Gesetz angewendet, wie bei der Sparcasse, oder nur das zweite, wie bei den einfacheren Versicherungsanstalten, oder beide in Verbindung mit einander bei allen von der Sterblichkeit der Menschen abhängenden Versicherungen.

Alle Versicherungs- (Assecuranz-) Anstalten haben zum Zweck, bei zufälligen Gefahren bedeutender Verluste die wirklich eintretenden Verluste dadurch erträglich zu machen, daß eine größere Gesellschaft gleich Bedrohter sich gegenseitig verbindet, durch Vertheilung der jedesmaligen Verluste unter Alle, dem Einzelnen den Verlust erträglich zu machen.

1) Die einfachsten dieser Anstalten, wie die Versicherungen von Häusern und Mobiliar gegen Feuersgefahr, bedürfen unserer Rechnungen gar nicht, indem nur etwa jährlich der eingetretene Verlust berechnet und unter die Theilnehmer vertheilt wird. Wenn aber, wie bei Versicherungen gegen Hagelschlag, die Verluste in einzelnen Jahren gar zu bedeutend

werden können, wird, um der Gesellschaft Bestand zu sichern, zweckmäßig seyn, daß ein Maximum festgestellt werde, zu dem ein Theilnehmer an jährlicher Zahlung verbunden seyn solle, indem den Verunglückten dann nur ein Theil ihres Schadens wieder vergütet wird.

2) Wird hingegen mit einer solchen Versicherungsanstalt noch die Handelsspeculation einer Versicherungsbank verbunden, welche die Verantwortlichkeit für die ganze Gesellschaft übernimmt, so werden dafür gleichförmigere jährliche Beiträge gefordert werden müssen, und dafür käme schon unsere Durchschnittsrechnung in Frage. Können dabei, wie für Mobiliarbrandversicherungen, die jährlichen Zahlungen zu sehr geringen Procenten angesetzt werden, so wird ein solches Geschäft leicht sehr ausgebreitete Theilnahme finden und daher sich sicher führen lassen. Wo aber größere Verluste drohen, wird diese Unternehmung einem immer blinderen Glückspiele ähnlich werden.

Die Berechnung beruhte hier auf denselben Gesetzen, wie bei den Handelsbanken, welche Waaren und Schiffe gegen die Gefahren des Meeres und des Krieges versichern. Hier läßt der Krieg offenbar wenig Berechnung zu, hingegen die Unbilden der Natur werden die Gefahr auf einen mittleren Durchschnitt des Verlustes bringen. Wollen wir nun dafür rechnen, so müssen wir aus unsern allgemeinen Bemerkungen beachten, daß die Rechnung für ein einzelnes Unternehmen keine Bedeutung hat, sondern nur für ein fortgesetztes hinlänglich großes Geschäft, und daß man hier nur nach mittlerem Durchschnitt und nicht nach zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit rechnen dürfe. Dagegen verstoßen die Versuche zur Theorie bei Condorcet und Lacroix *). Diese setzen die einfache Wahrscheinlichkeit ein Schiff zu verlieren $= e$, und die entgegengesetzte, es zu behalten, $1 - e = f$, und bestimmen dann, wenn Jemand p Schiffe versichert hat, die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit nach den Combinationen in $(e + f)^p$ oder nach den Potenzen des Binomium der

*) l. c. §. 129.

Wahrscheinlichkeit a priori. Dagegen erinnere ich, für eine solche Unternehmung kann gar keine Rechnung mit Bedeutung angelegt werden, die Unternehmung ist ein zufälliges Glücksspiel. Bedeutung gewinnt die Rechnung erst, wenn die Versicherungsbank fortgesetzt p Schiffe versichert, aber auch dann werden mir die Potenzen des Binomium $(e + f)^p$ keinen Bescheid geben. Denn ich kann das e nicht, wie bei den Seiten des Würfels, als einfache Wahrscheinlichkeit a priori, sondern nur als mittlere Wahrscheinlichkeit a posteriori durch fortgesetzte Erfahrungen bestimmen. Ich werde nicht nach dem Gesetz der großen Zahlen jedes Jahr im ganzen Geschäft dasselbe Verhältniß des Verlustes finden, sondern es wird glückliche und unglückliche Jahre im Wechsel mit einander geben, und mein e und f werden sich nur nach dem Durchschnitt vieler Jahre bestimmen lassen. Sei also der mittlere Werth des Verlustes 5%, also $e = 1/_{20}$, so sind diese 20 keine gleich mögliche Fälle, sondern die Erfahrung giebt uns erst einen Spielraum, zwischen welchem dieser mittlere Werth bestimmt werden muß. Es mag vorkommen, daß manches Jahr kein Schiff verloren geht, aber bei einem sich haltenden Geschäft kann es nicht vorkommen, daß alle verloren gingen; die Erfahrung muß uns erst kleinste und größte Verluste zeigen, zwischen denen wir die mittleren bestimmen. Unter einer solchen mittleren Bestimmung für e und f sind wir also gar nicht berechtigt, nach den Potenzen des Binomium $e + f$ zu rechnen. Wir bleiben bei einer viel einfacheren Durchschnittsrechnung.

Ein gewisser Handelsbetrieb beschäftige fortwährend hundert Schiffe, und die mittlere Gefahr des Verlustes betrage fünf Procent. Eine Bank versichere davon fortwährend 10 Schiffe, und die glücklichsten Unternehmungen mögen ohne wesentlichen Verlust die unglücklichsten mit 15 Procent Verlust verlaufen.

Soll diese Bank sicher stehen, so muß sie freilich durch ihren Fonds und ihren Credit auch den einmaligen Verlust

aller ihrer Schiffe tragen können. Aber dies bestimmt ihre Rechnung nicht. Vielmehr wenn a der Werth eines Schiffes und b der Werth einer Versicherungsprämie für a, so wird das pari der mathematischen Hoffnung hier bestehen, wenn $a = 20\,b$, $b = \frac{1}{20}\,a$. Dies gäbe der Bank ein sehr unsicheres Glückspiel; allein, wenn sie, um ein Uebergewicht der mathematischen Hoffnung zu erhalten, die Prämie nur um ein oder einige Procent höher setzt, so hat der Versicherte sich nur den einfachen Verlust gefallen zu lassen, während die Bank die Summe aller gewinnt. Die Bank wird sich mit etwas erhöhten Prämien sicher stellen und das Geschäft wird leicht zu ordnen seyn, wenn die Versicherten sich das gefallen lassen können.

Der Handel bringe dem Versicherten 20 Procent Gewinn, die mittlere Gefahr sei 5 Procent, die Bank verlange 8 Procent, so bleiben dem Versicherten doch 12 Procent Gewinn, und für den Fall des Unglücks wird ihm sein Capital doch bis auf 8 Procent Verlust erhalten.

So sehen wir, wie bei ruhigen Handelsverhältnissen Assecuranzbanken, ähnlich wie Spielbanken, ein sicheres Geschäft gründen können, aber auf eine für die Gesellschaft höchst rühmliche und wohlthätige Weise, indem sie zugleich dem einzelnen Kaufmann die größte Sicherheit gewähren.

3) Die jetzt unter öffentlicher Sicherheit so wohlthätig gewordenen Sparcassen, welche einem jeden Theilnehmer auch die kleinsten Ersparnisse, die er in die Casse legt, sammelt, schützt und mit Zins auf Zins anwachsen läßt, beruhen in der einfachen Einrichtung nur auf der Zinseszinsen-Rechnung. Die unvermeidlichen Verwaltungskosten, kleinen Hindernisse, kleinen Verluste nöthigen dabei, nach einem etwas ermäßigten Zinsfuß zu rechnen, und so wird bei glücklicher Verwaltung diese Casse nach und nach immer mehr eignes Vermögen gewinnen, welches aber nicht an die stets wechselnden Theilnehmer billig zurückvertheilt werden kann, daher wird es gut seyn, sie stets mit einem öffentlichen Zweck zu

verbinden, welcher nur die sicher überflüssig gewordenen Ersparnisse in Empfang nimmt.

Werden die Sparcassen aber künstlicher so eingerichtet, daß die Theilnehmer im vorgerückten Alter dadurch jährliche Renten auf Zeitlebens oder Beihülfe in Krankheiten oder für andere Verlegenheiten erhalten sollen, so wird die Berechnung schwieriger und hängt hauptsächlich mit von den Gesetzen der Sterblichkeit ab, die wir nun betrachten wollen.

2) Bevölkerung und Sterblichkeit.

§. 28.

Beobachten wir den Wechsel von Geburt und Tod im Einzelnen, so zeigt sich die zufälligste Verschiedenheit, der Eine stirbt kinderlos, der Andere hinterläßt eine zahlreiche Nachkommenschaft von Kindern und Enkeln; in einer Familie werden lauter Söhne, in einer andern lauter Töchter geboren. Wenn wir aber unsern Ueberblick über größere Gesellschaften ausdehnen, so werden wir bald gewahr, wie sich Alles gleichförmiger stellt. So wie die meisten unter einem Alter von 90 Jahren sterben, erreichen auch die Verhältnißzahlen der Geburten, der Sterbefälle u. s. w. bald mittlere mehr oder weniger constante Durchschnittswerthe. Die Wichtigkeit dieser Verhältnisse für so viele Zwecke der Gesellschaft hat nun, seitdem Halley aus den Geburts- und Sterbelisten der Stadt Breslau die erste Sterblichkeitstabelle zusammenstellte, sehr viele Mühe auf diese Gegenstände verwenden lassen, wonach wir nach und nach zu immer sicherern Uebersichten gelangt sind. Der erste Zweck ist hier, Sterblichkeits- und Bevölkerungstabellen zu erhalten. In den Sterblichkeitstabellen soll angegeben seyn, wie eine Anzahl von z. B. einer Million Neugeborner in verschiedenen Lebensaltern nach und nach wieder wegstirbt. Ist die Tabelle von Jahr zu Jahr geordnet, so wird die Differenz zweier nächsten Zahleu angeben, wie viele von einer Million Neugeborner im Durchschnitt grade in diesem Alter starben. Die Bevölkerungs-

tabelle dagegen soll angeben, wie viele von einer Million der Lebenden ein Jahr und darüber, zwei Jahr und darüber und so fort bis zum höchsten Lebensalter alt seyen. Die Differenz zweier nächsten Zahlen in einer solchen wieder nach Jahren geordneten Tabelle gibt an, wie viele grade von diesem Alter sich unter einer Million befinden.

Die Ausführung größerer Tabellen dieser Art hatte anfangs große Schwierigkeiten, besonders darin, daß man für eine feste Gesellschaft dem Leben grade derselben Individuen folge.

So fand sich anfangs nur in Klöstern oder großen Leibrentengesellschaften hinlängliche Genauigkeit. Nach und nach ist aber die Sache, besonders nach Laplace's Vorschlag, für Frankreich besser geordnet. Wählt man nach Sitte, Volksart und Klima einen aliquoten verhältnißmäßigen Theil eines großen Landes, dessen Bevölkerung weder durch bedeutende Auswanderungen gestört, noch durch Einwanderungen geändert wird, und zählt hier die ganze Volkszahl sorgfältig, während man sonst allgemein nur genaue Geburts- und Sterbelisten hält, so wird sich darnach der ganze Stand der Bevölkerung abschätzen lassen.

Wenn nun in diesen Listen bei der Geburt die Geschlechter, bei den Sterbefällen Geschlecht und Alter bemerkt werden, so lassen sich aus ihnen die Sterblichkeitstabellen und die Bevölkerungstabellen ableiten, neben dem wird es aber noch wünschenswerth seyn, daß auch noch über Heirathen, Zahl und Dauer der Ehen Verzeichnisse vorliegen.

§. 29.

Suchen wir nun für diese Verhältnisse der Sterblichkeit die allgemeinsten Vergleichungen, so müssen wir anstatt der alten Darstellung vorzüglich den vortrefflichen Nachweisungen von Moser folgen *).

*) Die Gesetze der Lebensdauer von Ludwig Moser, Professor in Königsberg. 1839.

1) Es sei zu einer bestimmten Zeit die Bevölkerung eines Landes $= p$, dazu n die Zahl der Geburten, m die der Sterbefälle im nächsten Jahre und ferner

$\frac{p}{n} = \nu$, $\frac{p}{m} = \mu$, so wird $p = \nu n = \mu m$; $m = \frac{\nu n}{\mu}$.

Hier nennt man $\frac{1}{\nu}$ das Maaß der Fruchtbarkeit und $\frac{1}{\mu}$ das Maaß der Sterblichkeit. Die Bevölkerung nimmt zu, wenn $\mu > \nu$; sie nimmt ab, wenn $\mu < \nu$; sie bleibt im Beharrungsstand, wenn $\mu = \nu$.

Wäre nun p_1 die Bevölkerung nach einem Jahre, so haben wir

$$p_1 = p + n - m = p + n\left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right) =$$

$$p + p\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}\right) = p\left(1 + \frac{\mu - \nu}{\mu\nu}\right) = p\,q,$$

wenn wir $1 + \frac{\mu - \nu}{\mu\nu} = q$ setzen.

Dieses läßt sich fortsetzen, wenn uns immer neue Werthe von q bekannt werden.

2) Sei nun eine bestimmte Anzahl Neugeborner $= n$ bekannt, deren Absterben von Jahr zu Jahr beobachtet worden, und die Zahl der Todesfälle im ersten, zweiten, dritten Jahr u. s. f. werde bezeichnet mit

m_0, m_1, m_2, m_3 u. s. w.

Auch bedeute

v_1, v_2, v_3, v_4 u. s. w.

das Verhältniß der Zahl der Individuen, welche nach 1, 2, 3, 4 Jahren noch leben, zur Zahl aller Neugebornen, so haben wir leicht

$$n v_1 = n - m_0;\ \text{daher}\ m_0 = n(1 - v_1).$$

Ferner

$$n v_2 = n v_1 - m_1$$

$$n v_3 = n v_2 - m_2$$

$$n v_4 = n v_3 - m_3 \text{ u. s. f.}$$

als Schema der Sterblichkeitstabelle.

3) Nehmen wir nun eine Bevölkerung im Beharrungsstand so daß in 1) $m = n$, $q = 1$, so leuchtet ein, daß, wenn dieser Zustand lange bestanden hat, die $m = n$ in einem Jahre sterbenden, wenn hier die vorige Sterblichkeitstabelle gilt, im Verhältniß v_0, v_1, v_2 u. s. f. bis zum höchsten Alter zusammengesetzt seyn müssen. Aus dem vollständigen Sterberegister eines Jahres ließe sich also die ganze Sterblichkeitsliste, und wenn p bekannt ist, auch die Bevölkerungstabelle darstellen.

Da nun die Volkszahl im Ganzen mit einer gewissen Langsamkeit ändert, so konnten die ersten, wie Halley, Süßmilch, Duvillard, unter der Voraussetzuog des Beharrungsstandes, die ersten Listen annäherungsweis entwerfen. Sie stellten aber, wenn in der That die Volkszahl im Wachsen war, gegen die beobachteten Geburten und Sterbefälle eine zu geringe, wenn sie im Fallen war, eine zu große Bevölkerung. Sie erhielten im ersten Fall, der bei uns meist gilt, eine zu rasche Sterblichkeit und zu große Fruchtbarkeit, im andern Fall umgekehrt zu langsame Sterblichkeit und zu kleine Fruchtbarkeit.

Um genauere Bestimmungen zu erhalten, muß man also einer Gesellschaft nachgehen, der man wenigstens von einem gewissen Alter an persönlich folgen kann, wie Deparcieux dies nach den Tontinen in Frankreich versuchte, Kerseboom es nach den Leibrentengesellschaften in Holland, besonders jetzt Brune nach der Witwenversorgungsanstalt in Berlin ausführten.

Inzwischen hatte Euler die nächst einfache mathematische Voraussetzung, in 1) μ, ν und q constant zu setzen, dazu gebracht. Wir hatten $p_1 = p\,q$, also nun $p_2 = p\,q^2$, $p_3 = p\,q^3$ u. s. f. Ferner

$$n_1 = n\,q,\ n_2 = n\,q^2,\ n_3 = n\,q^3$$
$$m_1 = m\,q,\ m_2 = m\,q^2,\ m_3 = m\,q^3.$$

Unter der Voraussetzung constanter Werthe von μ und ν würden also Bevölkerung, jährliche Geburten, jährliche Todesfälle, jedes geometrischen Progressionen mit demselben Expo-

nenten folgen. Wenn wir daher nur zwei bestimmte Glieder einer dieser Reihen kennen, so finden wir diesen Exponenten und somit das ganze Gesetz der wachsenden Bevölkerung. Sei z. B. s das Verhältniß des Wachsthums der Bevölkerung nach r Jahren von der Epoche an, wo p die Bevölkerung war, so haben wir

$$p q^r = s p \text{ oder } q^r = s.$$

$$r = \frac{\log. s}{\log. q}.$$

Nach dem Jahrbuch des Längenbureau in Paris für 1840 war die mittlere Bevölkerung im Durchschnitt der 21 Jahre 1817 bis 1837 31,815000. Dafür findet sich

$$\nu = 32{,}8$$
$$\mu = 39{,}6$$
$$q = 1{,}00515.$$

Setzen wir nun z. B. s = 2, so wird r = 135, das heißt nach dieser Voraussetzung würde sich in 135 Jahren die Bevölkerung von Frankreich verdoppeln.

Aber was gilt uns überhaupt diese Voraussetzung? Wachsthum nach geometrischen Reihen ist das einfachste Gesetz der Fruchtbarkeit der Natur. Eine einjährige Pflanze bringe ihrer Natur nach 10 Saamenkörner, so würde sie sich von Jahr zu Jahr, wenn kein Keim verloren ginge, nach den Potenzen von 10 vermehren und bald das ganze Land der Erde bedecken. Aehnlich die Vermehrung des Menschengeschlechts. Nach der Sage der Ebräer stammt ihr ganzes Volk ab von den zwölf Söhnen Jakobs. Von Geschlecht zu Geschlecht würde hier, wenn Gesundheit und Sitte dieselbe bliebe, sich also die Zahl der Familien in geometrischer Reihe vermehren. Oder die mittlere Fruchtbarkeit einer Ehe sei bei uns vier, so gäbe von Geschlecht zu Geschlecht jede Familie zwei nachkommende, und die Gesellschaft vermehrte sich nach q = 2. Aber dies Gesetz findet nirgends reine Anwendung, da im Gedräng des Lebens so viele Keime verloren gehen. Und dann, was soll es für unsre Frage gelten? Für unsre Frage

nach der Zunahme der Bevölkerung von Jahr zu Jahr hat diese Voraussetzung gar keine theoretische Bedeutung, und wir müssen die oft wiederholten Formeln von Euler (z. B. Lacroix §. 111. §. 112.) ganz verwerfen, weil auch die Beobachtung nirgends für sie stimmt. Sehen wir z. B. für die jetzigen Grenzen von Frankreich seit dem letzten Frieden die Bevölkerungslisten nach, so findet sich in der Zahl der Geburten und in der der Todesfälle gar kein Fortschritt; die Zahl der jährlich neu geschlossenen Ehen ist aber im Ganzen von etwa 200000 bis 260000 gewachsen. Die Bevölkerung ist jährlich im Steigen gewesen. Sie wurde gefunden Anfang 1820 30451000, Anfang 1831 32561000, Anfang 1836 33541000. Versuchen wir nun für diese 16 Jahre Eulers Formel, so erhalten wir $q = 1{,}00606$ und der mittlere Werth nach 11 Jahren für 1831 stimmte noch leidlich, indem er die Bevölkerung 32543200 gäbe. Aber die Ausführung für die einzelnen Jahre hätte gar keine Bedeutung, denn 1823 und 1824 war die jährliche Zunahme jedesmal über 220000 und 1832 nur 4453. Besser würde noch ein gradliniger Fortschritt mit einer jährlichen Vermehrung um 193000 anpassen.

Wir sind für diese Tabellen nur an die sorgfältige Benutzung der Beobachtungen gewiesen. Die Sterblichkeitstabellen lassen sich dabei durch die gezählten Köpfe von Versicherungsanstalten für jeden Zweck nach und nach genauer erhalten. Für die Ableitung der Bevölkerungstabellen aus diesen haben wir aber vorläufig den Beharrungsstand vorausgesetzt

$$p = n\,(1 + v_1 + v_2 + v_3 \ldots\ldots + v_{100})$$

wenn wir 100 als das höchste Lebensalter nehmen, und werden nach und nach verbessern können, indem die Geburtslisten jährlich n und die Conscriptionslisten jährlich $n\,v_{20}$ geben.

§. 30.

Die wissenschaftlich einfachste Aufgabe zwischen diesen Tabellen ist dann die Frage: sollte es nicht ein Naturgesetz

für das menschliche Leben geben, nach welchem eine Anzahl Neugeborner bei gewisser Sitte und gewisser Lebenskraft abstirbt, wenn man von den gewaltsamen Störungen verheerender Epidemien absieht? Sollte sich dieses nicht als eine Function des Zeitverlaufes darstellen lassen? Lambert faßte diesen Gedanken zuerst und bildete eine Mortalitätscurve, bei der auf der Axe der Abscissen die Lebensjahre aufgetragen und unter senkrechten Coordinaten die Ordinaten nach Verhältniß der jeder Zeit noch lebenden damit verbunden werden. Man rechne für 10000 Neugeborne, von denen y nach x Jahren noch leben, dabei bezeichne e die Basis der natürlichen Logarithmen, so fand er einer für London construirten Tabelle die Gleichung entsprechend

$$y = 100000 \left(\frac{96 - x}{96}\right)^2 - 6176 \left[e^{-\frac{x}{13,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}} \right]$$

und Duvillard meinte, man könne so allgemein mit der Gleichung

$$y = n \left(\frac{t - x}{t}\right)^2 - m \left[e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{l}} \right]$$

vergleichen. Es wäre eine Curve, die aus einer Parabel und zwei logistischen Linien verbunden wäre. Und allerdings es zeigen sich immer drei Wendepunkte, indem bis gegen das zehnte Jahr die y schnell abnehmen, dann eine nach unten erhabene Wendung etwa bis zum funfzigsten Jahr eine weit langsamere Abnahme folgen läßt, welche vom letzten Puncte sich wieder hohl nach unten wendet, und so mit immer rascherer Abnahme bis 80 Jahr fortschreitet, von wo mit einer wieder unten erhabenen Wendung die letzten langsamer absterben.

Indessen die künstliche Formel ist nicht brauchbar gefunden worden, so wie auch einige andere nachher versuchte. Es ist überhaupt eine mißliche Aufgabe, für eine so unsichere Reihe von Zahlen ohne allen theoretischen Grund eine Functionsform zu versuchen, besonders so wie hier die Zahlen stehen. Moivre giebt ganz richtig an, daß man schon sehr

annäherungsweise $y = 86 - x$ setzen dürfe, wenn man erst vom Jahre 22 an rechnen wolle, und die wenigen nicht beachte, die 86 überleben. Ueberhaupt, lassen wir etwa die ersten 7 Jahre weg und beachten die wenigen über 86 Jahre nicht, so wird sich die Sterblichkeitslinie immer sehr nahe bei als eine gebrochene grade Linie mit nur zwei Winkeln darstellen lassen.

Das einzige Räthsel bliebe eigentlich die rasche Sterblichkeit der ersten Jahre. Dafür findet nun Moser mit der Tabelle, welche Kerseboom aus den Registern der holländischen Leibrentengesellschaften gezogen hat, sehr nahe übereinstimmend $z = a x^{1/4}$, wenn x das Alter in Jahren, z die Anzahl der bis dahin Gestorbenen von einer bestimmten Anzahl Neugeborener bezeichnet. Dazu ist a eine Constante und also die Verhältnißzahl der im Verlauf des ersten Jahres Sterbenden. Nehmen wir dieses $a = 1/5$, so stimmt die Formel bis zum Jahr 26 sehr gut mit Kerseboom's Tafel. Für die höheren Alter versagt sie den Dienst, dafür ergänzt Moser

$$z = 1/5\, x^{1/4} \left(1 + \frac{0{,}35625}{10^4} x^2 + \frac{0{,}785}{10^8} x^4\right).$$

Aber nach den verglichenen Tafeln (S. 284) muß der Werth von a von 0,209 bis 0,350 verschieden gewählt werden, durch diese Veränderung allein läßt sich eine Sterbeliste nicht wohl in die andere umsetzen, und die ergänzenden Glieder scheinen doch sehr zufällig erkünstelt, indem die drei Constanten ganz unabhängig von einander gewählt werden müssen. So gibt am Ende auch dieser Versuch wenig Vertrauen für die Anwendung.

Moser hat aber sehr genau die Mängel aller bisher entworfenen Tabellen und deren Ursachen besprochen und dann (S. 137 u. f.) ausgeführt, wie sichere Beobachtungen allein gut verwendet werden können, um ohne Hypothesen aus ihnen naturgemäße Tabellen zu entwerfen.

§. 31.

Sind wir im Besitz einer Sterblichkeitstabelle, so können wir aus ihr die mittleren Wahrscheinlichkeiten für die Dauer des Menschenlebens ermessen.

1) In einem gegebenen Alter leben von einer Anzahl Neugeborner noch v, ein Jahr später noch v_1, 2 Jahr später v_2 u. s. f., so erhalte ich die mittlere Wahrscheinlichkeit, daß Jemand über das gegebene Alter noch n Jahre leben werde $= \frac{v_n}{v}$. Nach der Sterblichkeitstabelle von Duvillard für Frankreich werden von einer Million Neugeborner 369000 40 Jahre alt und 297000 50 Jahre alt, also ist hier die Wahrscheinlichkeit eines 40jährigen, noch 10 Jahre zu leben, $= \frac{297}{369} = 0{,}805$.

Hieraus erhalten wir den Begriff von der wahrscheinlichen Lebensdauer eines Menschen von gegebenem Alter, indem wir sagen, in der Zeit, in welcher die Hälfte der Lebenden gestorben ist, ist es gleich wahrscheinlich für den Einzelnen, unter den Lebenden oder unter den Gestorbenen zu seyn. Für diese wahrscheinliche Lebensdauer ist also $\frac{v_n}{v} = 1/2$. In der Tabelle für Frankreich erleben von einer Million Neugeborner 369404 das 40. Jahr, davon ist die Hälfte 184702, nun finden sich im Jahre 63 noch 185600 Lebende und im Jahre 64 noch 176035. Also fällt die wahrscheinliche Dauer zwischen 63 und 64, oder Jemand, 40 Jahre alt, hat noch eine wahrscheinliche Lebensdauer von etwas mehr als 23 Jahren. Es werden 67 Jahre alt 146882, davon die Hälfte 73441 führt zwischen 80423 bei 74, und 71745 bei 75. Jemand 67 Jahre alt hat hier noch eine wahrscheinliche Lebensdauer von über 7 Jahren.

2) Eine andere wahrscheinliche Bestimmung ist hier die der wahrscheinlichen mittleren Lebensdauer eines Menschen von gegebenem Alter. Wir rechnen hier die ganze

Zahl der Jahre von Menschenleben, welche die ganze Gesellschaft wahrscheinlich zu durchleben hat, zusammen, und theilen die Summen gleich unter alle anfangs Lebenden.

Sei V die mittlere Lebensdauer eines Menschen in dem Alter, in welchem die Gesellschaft noch v Lebende zählt; V_1 eben diese für v_1 u. s. f., so werden wir, wenn n das höchste Lebensalter in der Sterblichkeitstabelle ist, alle Zahlen derselben von v zu v_1 u. s. f. bis v_n zusammenzuzählen und die Summen mit v zu dividiren haben, um V zu bestimmen. Doch müssen wir dabei noch bedenken, daß das Sterbejahr eines Jeden nicht voll, sondern im Durchschnitt nur zur Hälfte zu rechnen sei, daher erhalten wir

$$V = \frac{v + v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_n - \frac{1}{2} v}{v}$$

$$V = \frac{1}{2} + \frac{v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_n}{v}$$

Eben so $V_1 = \frac{1}{2} + \frac{v_2 + v_3 \ldots + v_n}{v_1}$.

Und hieraus $v_2 + v_3 \ldots + v_n = (V_1 - \frac{1}{2})\, v_1$.

Also $V = \frac{1}{2} + \frac{v_1}{v}(V_1 + \frac{1}{2})$.

Mit dieser Formel läßt sich die Tafel der wahrscheinlichen mittleren Lebensdauer von dem höchsten Alter rückwärts am leichtesten berechnen

Würde für eine Gesellschaft nach einem mittleren durchlebten Alter gefragt, so mögen in ihr y Personen alt x, y′ alt x′, y″ alt x″ u. s. f. seyn. So haben die y Personen xy Jahre durchlebt und die Summe dieser Producte dividirt durch die ganze Zahl der Personen giebt das mittlere Alter für die Gesellschaft, so daß wir dafür haben

$$\frac{xy + x'y' + x''y'' + x'''y''' + \ldots}{y + y' + y'' + y''' + \ldots}.$$

Auf diese Form können wir auch den Ausdruck für das wahrscheinliche noch zu durchlebende mittlere Alter bringen, wenn wir anstatt der jedes Jahr Lebenden die jedes Jahr Sterbenden aus den Listen nehmen.

Es seyen gestorben im ersten Jahre a_0, im zweiten a_1, im dritten a_2 u. s. f. und wir rechnen für die fünf letzten Jahre, so haben wir für das Jahr

$$
\begin{aligned}
1\ v &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
2\ v_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
3\ v_2 &= a_2 + a_3 + a_4 \\
4\ v_3 &= a_3 + a_4 \\
5\ v_4 &= a_4
\end{aligned}
$$

und daraus nun für die ganze Gesellschaft die Summe der wahrscheinlich noch zu durchlebenden Jahre im Jahre

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 \\
2 &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \\
3 &= a_2 + 2a_3 + 3a_4 \\
4 &= a_3 + 2a_4 \\
5 &= a_4
\end{aligned}
$$

so daß wir das wahrscheinlich noch zu durchlebende mittlere Alter erhalten, wenn wir die Zahl der letzten Tabelle durch die entsprechende der ersten dividiren.

Diese mittlere wahrscheinliche Lebensdauer ist vom wahrscheinlichen Lebensalter für Neugeborne wegen der großen Sterblichkeit im ersten Jahre sehr verschieden, für Frankreich die wahrscheinliche nur 19, die mittlere über 29. Aber schon im zweiten Jahre rücken beide nahe zusammen, ja die wahrscheinliche übertrifft nach Süßmilch's Tabelle bis etwa zum Jahre 35 etwas die mittlere, hinter der sie dann wieder ein wenig zurückbleibt. Vergleichen wir die nach den Beobtungen zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten entworfenen Sterblichkeitstabellen, so findet sich der Verlauf in den ersten Jahren der Kindheit ganz ungemein verschiedenartig, später aber wird er gleichförmiger und regelmäßiger. So zeigt sich z. B. das wahrscheinliche Lebensalter von der Geburt an in Paris zwischen 8 und 9 Jahren *), in London etwas unter 3, in Wien unter 2, in Berlin über 2, dagegen

*) Giebt Lacroix a. a. O. §. 112 an, nach Dupré de St. Maur, aber die Jahrbücher des Längenbüreau scheinen damit gar nicht zu stimmen, sondern ein viel höheres wahrscheinliches Lebensalter zu fordern.

für ganz Frankreich 20 bis 21 Jahre, für England 27 bis 28, für die Schweiz 41. Sehen wir hingegen nach der Wahrscheinlichkeit für einen Menschen, alt 40 Jahr, noch 10 Jahre zu leben, so weichen die Verhältnisse nur in folgender Weise von einander ab. Für Frankreich ist sie 0,805; für London 0,696; für Wien 0,738; für Berlin 0,737; für das platte Land in der Schweiz 0,852; nach der Erfahrung der Equitablegesellschaft 0, 869.

Ferner die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen von 40 Jahren ist in London 19 Jahre; in Wien und Berlin etwas mehr als 19; in Paris 21; in Frankreich überhaupt 23; in der Schweiz nahe an 25; nach der Erfahrung der Equitablegesellschaft über 29.

Für die Völker von jetziger europäisch-christlicher Sitte ist das Verhältniß der Knaben bei den Geburten immer etwas stärker, als das der Mädchen. In den letzten Jahren in Frankreich im Mittel $^{16}/_{15}$, nur mit den Abweichungen auf $^{15}/_{14}$ und $^{17}/_{16}$. Aber die Sterblichkeit der Männer ist etwas größer als die der Frauen, in Frankreich im Verhältniß $^{55}/_{54}$, Frauen werden im Durchschnitt etwas älter. So scheinen im Leben bei uns beide Geschlechter in weniger verschiedener Zahl zu seyn.

Ein starkes Verhältniß der Geburten zur Bevölkerung ist an sich kein Zeichen eines kräftigen gesunden Lebens, sondern dafür zeugt erst die Höhe des wahrscheinlichen Lebensalters. Vielmehr viele Geburten, verbunden mit großer Sterblichkeit der Kinder, wie unter den Armen in großen Städten und in Fabrikgegenden sind uns Zeichen eines elenden Lebens.

Um die Verhältnisse dieser für so viele Zwecke im Leben so wichtigen Tabellen anschaulicher zu machen, lasse ich hier einige kurze Uebersichten folgen.

§. 32.

Die Sterblichkeitstabellen.

I. Sterblichkeitstabelle für Frankreich, nach Duvillard.

A. Alter.
B. Zahl der Lebenden.

A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.
0	1000000	28	451635	56	248782	84	15175
1	767525	29	444932	57	240214	85	11886
2	671834	30	438183	58	231488	86	9224
3	624668	31	431398	59	222605	87	7165
4	598713	32	424583	60	213567	88	5670
5	583151	33	417744	61	204380	89	4686
6	573025	34	410886	62	195054	90	3830
7	565838	35	404012	63	185600	91	3093
8	560245	36	397123	64	176035	92	2466
9	555486	37	390219	65	166377	93	1938
10	551122	38	383300	66	156651	94	1499
11	546888	39	376363	67	146882	95	1140
12	542630	40	369404	68	137102	96	850
13	538255	41	362419	69	127347	97	621
14	533711	42	355400	70	117656	98	442
15	528969	43	348342	71	108070	99	307
16	524020	44	341235	72	98637	100	207
17	518863	45	334072	73	89404	101	135
18	513502	46	326843	74	80423	102	84
19	507949	47	319539	75	71745	103	51
20	502216	48	312148	76	63424	104	29
21	496317	49	304662	77	55511	105	16
22	490267	50	297070	78	48057	106	8
23	484083	51	289361	79	41107	107	4
24	477777	52	281527	80	34705	108	2
25	471366	53	273560	81	28886	109	1
26	464863	54	265450	82	23680	110	0
27	458282	55	257193	83	19106		
28	145635	56	248782	84	15175		

II. Bevölkerungstabelle für Frankreich auf eine Million jährlicher Geburten.

Jahre		Jahre		Jahre		Jahre	
0	28763192	28	13385809	56	3478634	84	62941
1	27879430	29	12937526	57	3234136	85	49410
2	27159750	30	12495969	58	2998285	86	38855
3	26511499	31	12061178	59	2771238	87	30660
4	25899808	32	11633188	60	2553152	88	24243
5	25308876	33	11212024	61	2344179	89	19065
6	24730788	34	10797709	62	2144462	90	14807
7	24161357	35	10390261	63	1954134	91	11345
8	23598315	36	9989694	64	1773317	92	8565
9	23040450	37	9596023	65	1602110	93	6363
10	22487146	38	9209263	66	1440596	94	4644
11	21938141	39	8829431	67	1288830	95	3325
12	21393382	40	8456548	68	1146837	96	2330
13	20852939	41	8090636	69	1014613	97	1594
14	20316957	42	7731727	70	892111	98	1063
15	19785617	43	7379857	71	779248	99	688
16	19259122	44	7035068	72	675895	100	431
17	18737680	45	6697415	73	581875	101	260
18	18221498	46	6366957	74	496962	102	151
19	17710772	47	6043766	75	420877	103	83
20	17205690	48	5727922	76	353293	104	44
21	16706423	49	5419517	77	293825	105	22
22	16213131	50	5118652	78	242041	106	10
23	15725956	51	4825436	79	197459	107	4
24	15245026	52	4539992	80	159553	108	2
25	14770455	53	4262449	81	127758	109	1
26	14302340	54	3992943	82	101475	110	0
27	13840767	55	3731622	83	80081		
28	13385809	56	3478634	84	62941		

III. Sterblichkeitstabelle nach der Erfahrung der Equitable-Gesellschaft.

Alter	Zahl	Unterschied	Alter	Zahl	Unterschied	Alter	Zahl	Unterschied
10	6460		40	5117	63	70	2487	109
11	6435	25	41	5055	62	71	2378	109
12	6409	26	42	4993	62	72	2269	109
13	6381	28	43	4931	62	73	2159	110
14	6351	30	44	4869	62	74	2049	110
15	6320	31	45	4806	63	75	1938	111
16	6288	32	46	4742	64	76	1827	111
17	6255	33	47	4675	67	77	1715	112
18	6221	34	48	4605	70	78	1600	115
19	6186	35	49	4532	73	79	1481	119
20	6150	36	50	4455	77	80	1357	124
21	6113	37	51	4375	80	81	1219	138
22	6075	38	52	4293	82	82	1069	150
23	6035	40	53	4208	85	83	923	146
24	5993	42	54	4120	88	84	783	140
25	5949	44	55	4030	90	85	651	132
26	5903	46	56	3937	93	86	527	124
27	5855	48	57	3841	96	87	413	114
28	5805	50	58	3743	98	88	315	98
29	5754	51	59	3643	100	89	235	80
30	5702	52	60	3542	101	90	170	65
31	5649	53	61	3440	102	91	120	50
32	5595	54	62	3337	103	92	84	36
33	5540	55	63	3234	103	93	56	28
34	5483	57	64	3130	104	94	35	21
35	5424	59	65	3024	106	95	20	15
36	5364	60	66	2918	106	96	10	10
37	5303	61	67	2811	107	97	4	6
38	5241	62	68	2704	107	98	1	3
39	5179	62	69	2596	108	99	0	1

IV.

Florencourts Sterblichkeitsordnung im Allgemeinen nach Süßmilchs Tabellen, mit Angabe des wahrscheinlichen und mittlern Lebensalters.

A. Alter in Jahren.
B. Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährlich überhaupt 10000 sterben.
C. Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne stehenden Jahre.
D. Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber.
E. Mittlere Lebensdauer in Jahren.
F. Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
103	1	1	1	—	—
102	1	2	3	—	—
101	1	3	6	2	1
100	3	6	12	2	1
99	4	10	22	2,2	1,43
98	4	14	36	2,6	1,75
97	5	19	55	2,9	2,89
96	6	25	80	3,2	2,50
95	7	32	112	3,5	2,66
94	7	39	151	3,9	2,92
93	8	47	198	4,2	3,20
92	9	56	254	4,5	3,61
91	9	65	319	4,9	3,94
90	10	75	394	5,2	4,16
89	11	86	480	5,5	4,41
88	13	99	579	5,8	4,76
87	16	115	694	6,0	
86	20	135	829	6,1	
85	23	158	987	6,3	4,76
84	26	184	1171	6,4	4,69
83	29	213	1384	6,5	
82	35	248	1632	6,6	
81	44	292	1924	6,6	
80	51	343	2267	6,6	4,77

A.	B.	C.	D.	E.	F.
79	58	401	2668	6,65	
78	66	467	3135	6,71	
77	72	539	3674	6,81	
76	77	616	4290	6,96	
75	81	697	4987	7,15	4,92
74	84	781	5768	7,38	
73	87	868	6636		
72	89	957	7593		
71	90	1047	8640		
70	92	1139	9779	8,59	6,66
69	94	1233	11012		
68	96	1329	12341		
67	98	1427	13768		
66	101	1528	15296		
65	104	1632	16928	10,37	8,54
64	106	1738	18666		
63	108	1846	20512		
62	105	1951	22463		
61	103	2054	24517		
60	101	2155	26672	12,83	10,69
59	99	2254	28926		
58	97	2351	31277		
57	95	2446	33713		
56	92	2538	36251		
55	89	2627	38872	14,79	13,19
54	87	2714	41592	15,32	
53	84	2798	44390		
52	81	2879	47269		
51	78	2957	50226		
50	77	3034	53260	17,55	16,11
49	75	3109	56369		
48	75	3184	59553		
47	74	3258	62811		
46	73	3331	66142		
45	73	3404	69546	20,43	19,41

A.	B.	C.	D.	E.	F.
44	72	3476	73022		
43	71	3547	76569		
42	70	3617	80186		
41	69	3686	83872		
40	68	3754	87626	23,34	22,63
39	68	3822	91448		
38	68	3890	95338		
37	68	3958	99296		
36	67	4025	103321		
35	66	4091	107412	26,25	26,11
34	65	4156	111569		
33	64	4220	115789		
32	63	4283	120072		
31	62	4345	124417		
30	61	4406	128823	29,24	29,69
29	60	4466	133289		
28	59	4525	137814		
27	58	4583	142397		
26	58	4641	147038		
25	58	4699	151737	32,30	33,03
24	57	4756	156493		
23	56	4812	161305		
22	55	4867	166172		
21	54	4921	171093		
20	53	4974	176067	35,39	36,40
19	51	5025	181092		
18	48	5073	186165		
17	46	5119	191284		
16	45	5164	196448		
15	44	5208	201656	38,72	40,35
14	42	5250	206906		
13	43	5293	212199		
12	46	5339	217538		
11	48	5387	222925		
10	51	5438	228363	42,00	43,92

A.	B.	C.	D.	E.	F.
9	58	5496	333859		
8	70	5566	239425		
7	94	5660	245085		
6	135	5795	250880		
5	178	5973	256853	43.00	45,55
4	220	6193	263046	42,47	45,18
3	253	6446	269492	41,87	44,48
2	301	6747	276239	40.94	43,46
1	657	7404	283643	38,30	39,83
0	2596	10000	293643	29,36	19,90

V. Dasselbe im Besondern für das männliche Geschlecht.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
0	2605	10000	286903		
1	792	7395	276903		
2	290	6603	269508		
3	234	6313	262905		
4	192	6079	256592		
5	158	5887	250512	42.55	44,89
6	132	5729	244623		
7	115	5597	238891		
8	96	5482	233290		
9	74	5386	227803		
10	57	5312	222411	41,87	43,18
11	47	5255	217092		
12	44	5208	211829		
13	42	5164	206613		
14	40	5122	201449		
15	39	5082	196327	38,63	39,50
16	37	5043	191245		
17	38	5006	186202		
18	40	4968	181196		
19	42	4928	176228		
20	44	4886	171300	35,06	35,60

A.	B.	C.	D.	E.	F.
21	47	4842	166414		
22	50	4795	161572		
23	53	4745	156777		
24	55	4692	152032		
25	56	4637	147340	31,77	32 00
26	57	4581	142703		
27	58	4524	138122		
28	60	4466	133598		
29	62	4406	129132		
30	61	4344	124726	28,71	28,60
31	60	4283	120382		
32	61	4223	116099		
33	62	4162	111876		
34	62	4100	107714		
35	64	4037	103614	25,66	25,24
36	65	3973	99577		
37	66	3908	95604		
38	67	3842	91696		
39	68	3775	87854		
40	70	3707	84079	22,68	21,96
41	72	3637	80372		
42	73	3565	76735		
43	75	3492	73170		
44	77	3417	69678		
45	78	3340	66261	19,84	18,73
46	79	3262	62921		
47	81	3183	59659		
48	83	3102	56476		
49	85	3019	53374		
50	87	2934	50365	17,16	15,59
51	87	2847	47431		
52	88	2760	44584		
53	88	2672	41824		
54	89	2586	39152		
55	89	2497	36566	14,64	12,69

A.	B.	C.	D.	E.	F.
56	90	2408	34069		
57	91	2318	31661		
58	92	2227	29343		
59	93	2135	27116		
60	95	2042	24971	12,22	10,04
61	98	1947	22929		
62	101	1849	20982		
63	107	1748	19133		
64	110	1641	17385		
65	108	1531	15744	10,28	7,98
66	104	1423	14213		
67	102	1319	12790		
68	98	1217	11471		
69	94	1119	10254		
70	91	1025	9135	8,91	6,64
71	87	934	8110		
72	83	847	7176		
73	78	764	6329		
74	72	686	5565		
75	65	614	4879	7,94	6,36
76	57	549	4265		
77	50	492	3716		
78	44	442	3224		
79	40	398	2782		
80	38	358	2384	6,66	5,13
81	36	320	2026		
82	35	284	1706		
83	34	249	1422		
84	32	215	1173		
85	30	183	958	5,23	3,52
86	27	153	775		
87	24	126	622		
88	20	102	496		
89	15	82	394		
90	12	67	312	4,65	3,64

A.	B.	C.	D.	E.	F.
91	9	55	245		
92	8	46	190		
93	7	38	144		
94	7	31	106		
95	6	24	75	3,12	2,25
96	5	18	51		
97	4	13	33		
98	4	9	20		
99	2	5	11		
100	1	3	6	2,00	1,50
101	1	2	3		
102	1	1	1		

VI.

Dasselbe im Besondern für das weibliche Geschlecht.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
0	2868	10000	299872		
1	456	7132	289872		
2	289	6676	282740		
3	249	6378	276064		
4	188	6138	269677		
5	152	5950	263539	44,39	47,05
6	126	5798	257589		
7	97	5672	251791		
8	84	5575	246119		
9	73	5491	240544		
10	63	5418	235053	43,38	45,25
11	53	5355	229635		
12	44	5302	224280		
13	38	5258	218978		
14	35	5220	213720		
15	33	5185	208500	40,21	41,43

A.	B.	C.	D.	E.	F.
16	31	5152	203315		
17	30	5121	198163		
18	31	5090	193042		
19	32	5059	187957		
20	34	5027	182893	36,38	37,16
21	37	4993	177866		
22	40	4956	172873		
23	43	4916	167917		
24	47	4873	163001		
25	50	4826	150182	31,12	33,71
26	53	4776	153302		
27	56	4723	148526		
28	59	4667	143803		
29	62	4608	139136		
30	64	4546	134528	29,59	30,32
31	65	4482	129982		
32	66	4417	125500		
33	66	4351	121083		
34	65	4285	116732		
35	65	4220	112447	26,64	27,14
36	66	4155	108227		
37	67	4089	104072		
38	66	4022	99983		
39	69	3954	95961		
40	70	3885	92007	23,68	23,90
41	71	3815	88122		
42	72	3744	84307		
43	73	3672	80563		
44	74	3599	76891		
45	75	3525	73292	20,79	20,67
46	76	3450	69767		
47	77	3374	66317		
48	78	3297	62943		
49	79	3219	59646		
50	80	3140	56427	17,97	17,43

A.	B.	C.	D.	E.	F.
51	81	3060	53287		
52	82	2979	50227		
53	83	2897	47248		
54	84	2815	44351		
55	85	2731	41536	15,21	14,10
56	85	2646	38805		
57	86	2521	36159		
58	87	2475	33598		
59	87	2388	31123		
60	88	2301	28735	12,48	11,00
61	90	2213	26434		
62	93	2123	24221		
63	97	2030	22098		
64	101	1933	20068		
65	104	1832	18135	9,90	8,14
66	108	1728	16303		
67	113	1620	14575		
68	119	1507	12955		
69	121	1388	11448		
70	118	1267	10060	7,94	6,16
71	112	1149	8793		
72	107	1037	7644		
73	101	930	6607		
74	94	829	5677		
75	88	735	4848	7,00	4,76
76	83	647	4113		
77	77	564	3466		
78	70	487	2902		
79	65	417	2415		
80	56	352	1998	5,67	4,03
81	47	296	1646		
82	39	249	1350		
83	35	210	1101		
84	28	175	891		
85	23	147	716	4,87	3,62

A.	B.	C.	D.	E.	F.
86	21	124	569		
87	19	103	445		
88	17	84	342		
89	15	67	258		
90	12	52	191	3,67	2,50
91	10	40	139		
92	8	30	99		
93	7	22	69		
94	5	15	47		
95	3	10	32	3,20	2,00
96	2	7	22		
97	1	5	15		
98	1	4	10		
99	1	3	6		
100	1	2	3	1,50	1,00
101	1	1	1		

VII.

Sterblichkeitstafel nach den Erfahrungen über Frauen der Preußischen allgemeinen Wittwen-Verpflegungsanstalt.

Alter	Sterbende	Lebende	Mittlere Lebensdauer	Es stirbt eine von
15	181	10809	40,65	59,72
16	171	10628	40,33	62,15
17	161	10457	39,98	64,33
18	152	10296	39,60	67,74
19	144	10144	39,19	70,44
20	137	10000	38,75	72,99
21	131	9863	38,28	75,29
22	125	9732	37,78	77,86
23	119	9607	37,27	80,73
24	114	9488	36,73	83,23
25	110	9374	36,17	85,22

Alter	Sterbende	Lebende	Mittlere Lebensdauer	Es stirbt eine von
26	106	9264	35,60	87,40
27	103	9158	35,00	88,91
28	101	9055	34,39	89,65
29	100	8954	33,78	89,54
30	100	8854	33,15	88,54
31	100	8754	32,53	87,54
32	100	8654	31,90	86,54
33	100	8554	31,26	85,54
34	99	8454	30,63	85,39
35	99	8355	29 98	84,39
36	98	8256	29,33	84,24
37	98	8158	28,68	83,24
38	98	8060	28,02	82.24
39	97	7962	27,37	82,08
40	97	7865	26,70	81,08
41	97	7768	26,02	80,08
42	98	7671	25,35	78,28
43	98	7573	24,67	77,28
44	98	7475	23,99	76,28
45	99	7377	23,30	74,52
46	100	7278	22,61	72,78
47	101	7178	21,91	71,07
48	103	7077	21,22	68,71
49	105	6974	20,52	66,42
50	107	6869	19,83	64,20
51	110	6762	19,14	61,47
52	115	6652	18,45	57,84
53	121	6537	17,76	54,02
54	127	6416	17,09	50,52
55	134	6289	16,42	46,93
56	141	6155	15,77	43,65
57	149	6014	15,13	40,36
58	157	5865	14,50	37,36
59	165	5708	13,88	34,59
60	173	5543	13,28	32,04
61	181	5370	12,69	29,67
62	189	5189	12,12	27,56

Alter	Sterbende	Lebende	Mittlere Lebensdauer	Es stirbt eine von
63	197	5000	11,56	25,38
64	205	4803	11,01	23,43
65	213	4589	10,48	21,59
66	222	4385	9,97	19,75
67	231	4163	9,47	18,02
68	238	3932	9,00	16,52
69	242	3694	8,55	15,22
70	244	3452	8,11	14,15
71	245	3208	7,69	13,09
72	246	2963	7,28	12,08
73	246	2717	6,89	11,08
74	245	2471	6,53	10,09
75	242	2226	6,20	9,20
76	236	1984	5,89	8,41
77	224	1748	5,62	7,80
78	206	1524	5,37	7,40
79	184	1318	5,13	7,16
80	162	1134	4,88	7,00
81	145	972	4,61	6,70
82	134	827	4,34	6,17
83	126	693	4,08	5,50
84	114	567	3,87	4,97
85	97	453	3,72	4,67
86	79	356	3,60	4,51
87	62	277	3,49	4,47
88	49	215	3,35	4,39
89	39	166	3,19	4,26
90	31	127	3,01	4,10
91	24	96	2,82	4,00
92	19	72	2,60	3,79
93	15	53	2,35	3,53
94	12	38	2,08	3,17
95	9	26	1,81	2,89
96	7	17	1,50	2,43
97	5	10	1,20	2,00
98	3	5	0,90	1,67
99	2	2	0,50	1,00

3) Die Assecuranzen auf das Leben.

§. 33.

Die wichtigsten Anwendungen dieser Lehren gehören nun von den Sparcassen hinüber den Leibrenten, Lebensversicherungen, Wittwencassen u. s. w., wobei die Zinseszinsenrechnung mit unsrer Wahrscheinlichkeitsrechnung in Verbindung kommt.

Wir machen die Sache fürs erste am besten durch die Leibrenten deutlich. Würde nur gefragt, wie groß die jährliche Rente b seyn werde, durch die ich ein Capital a mit Zinsen auf Zinsen bei dem Zinsfuß r in n Jahren abtragen werde, so gibt die Zinseszinsenrechnung die Gleichung

$$a\, r^n (r - 1) = b \left(r^n - 1\right).$$

Will ich also für das Capital a eine Leibrente kaufen, und wüßte ich dabei, wie lange ich noch leben werde, so würde diese Gleichung mir b als Rente bestimmen. Allein dies n kann ich nur nach Wahrscheinlichkeit ansetzen, und hier muß uns die Unsicherheit dieses Begriffes recht deutlich werden. Für eine oder einige Personen hat die Frage nach einem wahrscheinlichen Lebensalter gar keine Bedeutung. Verordnen die Gesetze eine solche nach Ulpians Entscheidung, so ist dies nur eine schiedsrichterliche Entscheidung, die auch nur vorläufig gilt, und gegen die nach erfolgtem Tode Einsprache geschehen darf. Aber nicht nur das. Für eine große Gesellschaft haben wir Durchschnittszahlen eines wahrscheinlichen und eines mittleren Lebens angegeben, aber auch keine von diesen werden wir für das n unserer Gleichung einsetzen dürfen, sondern wir bedürfen für die Verbindung der Zinseszinsenrechnung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch eine genauere Vergleichung des ganzen Verlaufes.

1) Wenn von v Personen von einem gegebenen Alter jede Eigenthümer einer Leibrente s, die sie also zeitlebens jährlich empfängt, ist, so wird die Bank, welche die Zahlungen leistet, nach unsrer obigen Bezeichnung (§. 29) wahrscheinlich am Ende des ersten Jahres v_1 s, am Ende des zweiten v_2 s u. s. f. bis nach n Jahren v_n s zu bezahlen haben.

Bedeutet nun r den Coefficienten der jährlichen Vermehrung des Capitals bei dem üblichen Zinsfuß (für 5%, r = 1,05), so sind die Werthe dieser Summen zu Anfang des ersten Jahres verhältnißmäßig $\frac{v_1 s}{r}$, $\frac{v_2 s}{r^2}$, $\frac{v_3 s}{r^3}$ ... $\frac{v_n s}{r^n}$. Die Summe alle dessen giebt also den ganzen Betrag dessen, was die v Personen im Anfang zu zahlen haben, um diese Rente zu erlangen. Jeder hat daher für seinen Theil zu zahlen.

$$\frac{1}{v}\left[\frac{v_1 s}{r} + \frac{v_2 s}{r^2} + \frac{v_3 s}{r^3} \ldots + \frac{v_n s}{r^n}\right] =$$

$$\frac{s}{v}\left[\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{r^2} + \frac{v_3}{r^3} \ldots + \frac{v_n}{r^n}\right] =$$

$$\frac{s}{v\, r^n}\left[v_1\, r^{n-1} + v_2\, r^{n-2} \ldots v_{n-1}\, r + v_n\right].$$

Dies wäre also das anfängliche Capital der Leibrente, gebildet aus dem jetzigen Betrag aller einzelnen Zahlungen, jede multiplicirt mit der der Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten.

Wir setzen $v_i\, r^{n-i} = Ai$ und

$$B_i = v_n + v_{n-1}\, r + \ldots + v_{i+1}\, r^{n-i-1} + v_i\, r^{n-i}.$$

Daher $B_{i-1} = v_n + v_{n-1}\, r \ldots + v_{i+1}\, r^{n-i-1} + v_i\, r^{n-i}$
$+ v_{i-1}\, r^{n-i+1}$.

und $B_i - B_{i-1} = v_{i-1}\, r^{n-i+1} = A_{i-1}$.

oder $B_i - B_{i-1} = A_{i-1}$.

2) Darnach können wir mit Babbage *) die Rententabelle berechnen.

Der Werth einer jährlichen Rente = 1 für ein Leben alt i wird =

---

*) Charles Babbage's vergleichende Darstellung der verschiedenen Lebensassecuranzanstalten. Aus dem Englischen. Weimar 1827.

$$\frac{1}{v_i r^{n-i}} \left[v_n + v_{n-1} r + \ldots + v_{i+1} r^{n-i-1} \right] = \frac{B_{i+1}}{A_i}.$$

Hier waren die Renten am Ende des ersten Jahres zahlbar, wollen wir hingegen vom ersten Zahlungstermin an rechnen, so müssen wir um ein Jahr vorgehen. So wird der Werth einer jährlichen Rente = 1 von einem Leben alt i, wenn die erste Zahlung sogleich geschieht $= \frac{B_i}{A_i}$.

Der Werth einer Rente = 1 von einem Leben i alt, auf p Jahre hinausgesetzt, ist gleich dem Werth einer Rente von einem Leben i + p alt, zahlbar nach p Jahren und multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit diese Zahlung zu erhalten,

$$= \frac{B_{i+p+1}}{A_{i+p}} \times \frac{1}{r^p} \times \frac{v_{i+p}}{v_i}.$$

Aber $v_i = A_i \cdot r^{-n+i}$ daher wird dieses $= \frac{B_{i+p+1}}{A_{i+p}} \times$

$$\frac{1}{r^p} \times A_{i+p} \cdot \frac{r^{-n-i-p}}{A_i \cdot r^{-n-i}} = \frac{B_{i+p+1}}{A_i}.$$

3) Wenden wir uns nun zu dem umgekehrten Fall der Lebensversicherungen auf das ganze Leben, wo ein Capital auf den Todesfall gekauft werden soll durch jährliche gleiche, zeitlebens fortgesetzte Zahlungen.

Der Werth einer solchen Versicherung von einem Capital = 1 für ein Leben alt i, ist gleich der Summe der Werthe der Wahrscheinlichkeiten, sie am Ende des ersten, zweiten, dritten . . . . nten Jahres zu erhalten.

Der gegenwärtige Werth vom Capital 1, zahlbar nach einem Jahre, ist $\frac{1}{r}$, und die Wahrscheinlichkeit, ihn zu erhalten

$$= \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i}$$

also der Werth für das erste Jahr

$$= \frac{1}{r} \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i};$$

eben so für das

$$\text{Jahr } 2 \; \frac{1}{r^2} \frac{v_{i+1} - v_{i+2}}{v_i}$$

$$\text{Jahr } 3 \; \frac{1}{r^3} \frac{v_{i+2} - v_{i+3}}{v_i}$$

$$\vdots$$

$$\text{Jahr } (n-i) \frac{1}{r^{n-i}} \frac{v_n}{v_i}$$

und die Summen davon, als Werth der Versicherung für das ganze Leben wird $\frac{1}{v_i \, r^{n-i}} \left[\left(v_i - v_{i+1}\right) r^{n-i-1} + \left(v_{i+1} - v_{i+2}\right) r^{n-i-2} + \ldots + v_n \right] = \frac{B_i - r B_{i+1}}{r A_i}$.

Soll dieser nun in q Zahlungen geleistet werden, die erste gleich, und jede gleich x so ist $x \times \frac{B_i - B_{i+q}}{A_i} = \frac{B_i - r B_{i+1}}{r A_i}$

und $x = \frac{1}{r} \frac{B_i - r B_{i+1}}{B_i - B_{i+q}}$.

Wird nun i + q größer als die größte Dauer des menschlichen Lebens in der Tabelle, so ist $B_{i+q} = 0$. So wird für die Versicherung auf das ganze Leben alt i die jährliche Zahlung $= \frac{1}{r} \frac{B_i - r B_{i+1}}{B_i} = \frac{1}{r} - \frac{B_{i+1}}{B_i}$.

§. 34.

Neben diesen stehen noch die Versorgungsanstalten für Witwen und Waisen. Wollen wir die Einrichtung dieser mit

Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung berathen, so können wir die Rechnung nur für ein bestimmtes Verhältniß zweier Lebensalter aufnehmen und müssen sie für jedes solches Verhältniß besonders durchführen.

A. Wir fragen also zunächst: wenn M Ehepaare zu einer Witwenversorgungsanstalt zusammentreten, jeder Mann μ, jede Frau φ Jahre alt

1) wie viele Witwer,
2) wie viele Witwen,
3) wie viele Ehepaare

werden dem wahrscheinlichen Durchschnitt gemäß nach n Jahren noch leben?

Zur Beantwortung suchen wir in der Sterblichkeitstabelle für das männliche Geschlecht die Anzahl der Lebenden, welche zum Alter von μ und $\mu + n$ Jahren gehören; sie sollen m und m′ seyn, dann eben so für das weibliche Geschlecht für φ und $\varphi + n$ Jahre, diese wollen wir mit ω und ω' bezeichnen.

1) So ergiebt sich die Anzahl der nach n Jahren

$$\text{verstorbenen Männer} = \left(1 - \frac{m'}{m}\right).\ M.$$

$$\text{verstorbenen Frauen} = \left(1 - \frac{\omega'}{\omega}\right).\ M.$$

2) Ein aliquoter Theil $= \frac{1}{\psi}$ der verstorbenen Frauen gehört zu den Ehepaaren, aus denen auch die Männer gestorben sind; der übrige Theil $= 1 - \frac{1}{\psi}$ gehört zu den noch lebenden Männern, die jetzt Witwer geworden sind. Also haben wir nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\psi} : \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) = \text{Anzahl der verstorbenen Männer} : \text{Anzahl der noch lebenden}$$

$$= 1 - \frac{m'}{m} \qquad : \qquad \frac{m'}{m}.$$

Daher $\psi = \frac{m}{m - m'}$.

3) Ein aliquoter Theil $= \frac{1}{\rho}$ der verstorbenen Männer gehört zu den Ehepaaren, aus welchen auch die Frauen gestorben sind. Dies giebt wie vorher

$$\rho = \frac{\omega}{\omega - \omega'}.$$

4) Demnach haben wir am Ende des nten Jahres

Anzahl der noch lebenden Witwen $\left(1 - \frac{1}{\psi}\right) . \left(1 - \frac{\omega'}{\omega}\right) . \ M.$

$$= \frac{m' (\omega - \omega')}{m \ \omega} M.$$

Anzahl der noch lebenden Witwen $= \frac{\omega' (m - m')}{m \ \omega} M.$

Anzahl aller ganz erloschenen Ehen $= \left(\frac{1}{\psi} 1 - \frac{\omega'}{\omega}\right) M.$

$$= \frac{(m - m') (\omega - \omega')}{m \ \omega} M.$$

also Anzahl d. noch bestehenden Ehen $\left(= 1 - \frac{m' (\omega - \omega')}{m \ \omega} - \frac{\omega' (m - m')}{m \ \omega} - \frac{(\omega - \omega') (m - m')}{m \ \omega}\right) M. = \frac{m' \ \omega'}{m \ \omega} M.$

welches also auch die Anzahl sowohl der noch lebenden Ehemänner als Ehefrauen ist.

5) Am Ende eines jeden nten Jahres empfängt also die Casse, wenn der Beitrag eines einzelnen Ehemannes von bestimmtem Alter, von welchem anfangs M vorhanden sind, mit S bezeichnet wird, überhaupt eine Summe

$$= \frac{m' \ \omega'}{m \ \omega} . M \ S.$$

Dagegen zahlt die Casse am Ende jedes nten Jahres zusammen eine Summe

$$= \frac{\omega' (m - m')}{m \ \omega} M \ Z,$$

wenn Z eine einzelne Witwenrente bezeichnet.

B. Dies vorausgesetzt nehmen wir nun an: Die Männer zahlen gleich beim Eintritt ein Jeder die Einlage E ein,

und Jeder jährlich, dessen Frau noch lebt, den Beitrag S; dagegen erhält jede Witwe ein Jahr nach des Mannes Tode zum erstenmal die Rente Z, die sie dann alljährlich bezieht, bis zu ihrem Tode. Welches ist nun das Verhältniß zwischen E, S und Z, gegenseitige Zurechnung der Zinsen von Zinsen nach Zinsfuß r vorausgesetzt?

1) Man suche wie zuvor m und ω.

2) Dann aus derselben Sterblichkeitstafel die verschiedenen Werthe von m′ und ω', die zu n = 1, n = 2, n = 3 u. s. w. gehören, bis man auf einen Werth kommt, nach welchem entweder kein Ehemann oder keine Ehefrau mehr lebt, wodurch dann der letzte Werth von n bestimmt wird, für welchen die wahrscheinlichen jährlichen Beiträge berechnet werden müssen.

3) Bezeichnen wir nun die Zahlen aus der Sterblichkeitstabelle nach dem Eintritt in die Gesellschaft am Ende der Jahre 1, 2, 3 . . . n für die lebenden Männer mit a_1, a_2, a_3 . . . a_n; für die lebenden Frauen mit b_1, b_2, b_3 . . . b_n so ist der jährliche Beitrag am Ende des

$$\text{Jahres } 1 \ldots\ldots \frac{a_1\, b_1}{m\, \omega} \,.\, M\, S$$

$$2 \ldots\ldots \frac{a_2\, b_2}{m\, \omega} \,.\, M\, S$$

$$3 \ldots\ldots \frac{a_3\, b_3}{m\, \omega} \,.\, M\, S$$

$$\vdots$$

$$n \ldots\ldots \frac{a_n\, b_n}{m\, \omega} \,.\, M\, S.$$

4) Wenn nun vom Eintritt in die Gesellschaft bis zum Tode der letzten Witwe t Jahre verfließen, so ist am Ende des Jahres t, den Zinsfuß = r gesetzt,

$$\text{der Werth des ersten Beitrages} = r^{t-1} \frac{a_1\, b_1}{m\, \omega}\, M\, S$$

$$\text{zweiten} \ldots = r^{t-2} \frac{a_2\, b_2}{m\, \omega}\, M\, S$$

$$\text{dritten} \ldots = r^{t-3} \frac{a_3\, b_3}{m\, \omega}\, M\, S$$

$$\vdots$$
$$n\text{ ten} \ldots = r^{t-n} \frac{a_n\ b_n}{m\ \omega} M\ S.$$

Die Summe dieser Werthe wollen wir bezeichnen mit

$$\Sigma.\ M\ S.$$

Dazu kommt noch der reducirte Werth der anfänglichen Einlage E mit den Zinsen von Zinsen; dieser ist am Ende des Jahres t

$$= r^t.\ E\ M.$$

5) Wird nun dagegen der Betrag der auszuzahlenden Renten gesucht, so ergiebt sich dieser am Ende des

$$\text{Jahres } 1 = \frac{b_1\ (m - a_1)}{m\ \omega} M\ Z.$$
$$\ldots 2 = \frac{b_2\ (m - a_2)}{m\ \omega} M\ Z$$
$$\ldots 3 = \frac{b_3\ (m - a_3)}{m\ \omega} M\ Z$$
$$\vdots$$
$$\ldots t = \frac{b_t\ (m - a_t)}{m\ \omega} M\ Z.$$

6) Die reducirten Werthe davon sind dann für

$$\text{Jahr } 1 = r^{t-1} \frac{b_1\ (m - a_1)}{m\ \omega} M\ Z$$
$$\ldots 2 = r^{t-2} \frac{b_2\ m - a_2)}{m\ \omega} M\ Z$$
$$\ldots 3 = r^{t-3} \frac{b_3\ (m - a_3)}{m\ \omega} M\ Z$$
$$\vdots$$
$$\ldots t = r^0 \frac{b_t\ (m - a_t)}{m\ \omega} M\ Z$$

dessen Summe $= \Pi.\ M\ Z$ seyn mag.

7) Soll also Einnahme und Ausgabe der Casse gerade ausgeglichen werden,

so ist $\quad r^t\ E\ M + \Sigma.\ M\ S = \Pi.\ M\ Z.$

oder $\quad r^t\ E + \Sigma.\ S = \Pi.\ Z.$

folglich $\quad S = \dfrac{\Pi.\ Z - r^t\ E}{\Sigma}.$

8) Verlangt man nun, daß der erste Einsatz ein Vielfaches vom jährlichen Beitrag = γ S seyn soll, so wird

$$r^t \gamma S + \Sigma . S = \Pi . Z.$$

und
$$S = \frac{\Pi . Z.}{r^t \gamma + \Sigma} .$$

Für die ganze Ordnung der Anstalt müssen also für alle vorkommenden Verhältnisse von μ und φ die Werthe von S berechnet werden.

§. 35.

Wird endlich in ähnlicher Weise eine wahrscheinliche Bestimmung für eine Waisenversorgungsanstalt gesucht und wir verstehen unter Waisen alle vaterlosen Kinder, so würden wir wieder mit einem bestimmten Verhältniß vom Alter des Vaters zu dem des Kindes ($\mu : \varphi$) anfangen müssen, und dabei eine Bestimmung festzusetzen haben, bis zu welchem Alter des Kindes = α die Jahrrente vom Tode des Vaters an gezahlt werden solle. So steht die Rechnung gerade wie bei den Witwen, nur daß die ω und b hier andere Werthe aus den Tafeln erhalten, und anstatt t $\alpha - \varphi$ gesetzt werden muß. Die Schlußgleichung wird

$$S = \frac{\Pi . Z}{r^{\alpha - \varphi} \gamma + \Sigma} .$$

Auch hier müßten die Tafeln für jedes Verhältniß $\mu : \varphi$ berechnet werden.

§. 36.

Wollen wir nun diese Rechnungen für die Einrichtung von Leibrentenbanken, Witwen- und Waisencassen, Lebensversicherungsgesellschaften anwenden, so müssen wir voraus folgende wichtige Warnungen beachten.

1) Ihre Zahlen haben für kleine Gesellschaften gar keine Bedeutung, indem diese immer dem Glückspiel überlassen bleiben.

2) Man darf bei der Rechnung nicht die Sterblichkeitstabellen eines ganzen Volkes und überhaupt nicht die von der ersten Jugend auf anwenden.

Die letzteren bleiben immer zu schwankend, und dann gehören diejenigen, die an solchen Anstalten Theil nehmen, zu den in mäßigem Wohlstand lebenden, unter denen die Sterblichkeit einen langsamen Fortschritt hat. Wir werden am besten nur solchen Tabellen folgen, die aus den Erfahrungen in einem bestimmten Gebiete selbst abgeleitet sind, denn die nach der Erfahrung von verschiedenen Zeiten, Orten und Theilen der Gesellschaft entworfenen Tafeln gehen auch in den mittle: Jahren immer noch einen so verschiedenen Gang, daß sich keine Regel eines allgemeinen Durchschnitts festhalten läßt.

3) Die Vorausberechnung für große Anstalten wird darin immer eine große Schwierigkeit behalten, daß man nach einem bestimmten Zinsfuß rechnen muß, während die Veränderungen des Zinsfußes nicht wohl vorausgesehen werden können. Vor nicht so langer Zeit rechnete man zu 5 oder 6%, wo jetzt 3% rathsamer ist.

4) Zum Bestehen großer Anstalten ist wesentlich erforderlich, daß die Theilnehmer in abgeschlossene Gesellschaften getheilt werden, in deren jeder Einnahme und Ausgabe sich ausgleichen, damit die Forderungen der früheren Mitglieder nicht durch Beiträge befriedigt werden, welche die späteren erst zahlten.

Die Gefahr, die darin liegt, kann sich so lange verbergen, als die Theilnahme der Anstalt im Steigen bleibt, aber sobald sie ihre größte Höhe erreicht hat oder gar abnimmt, wird sie dieser Fehler rasch dem Verderben zuführen.

5) Endlich in Rücksicht aller Theorien dieser Art muß wohl bedacht bleiben, was selbst strenge Mathematiker oft nicht beachtet haben, daß alle hier gegebenen Gleichungen, noch dazu mit unsichern Durchschnittszahlen, doch nur dem entsprechen, was wir bei der Wahrscheinlichkeit a priori die Gleichheit der mathematischen Hoffnung nannten. Wollten wir also schlechthin diesen Formeln vertrauen, so stünden die Angelegenheiten nur wie bei einem Glückspiel mit gleicher mathematischer Hoffnung, es könnte ins Unsichere bald viel gewonnen, bald viel verloren werden. Wir müssen also auch

hier jedesmal der Casse überwiegende mathematische Hoffnung zusichern, nicht um sie gewinnen zu machen, sondern auch schon, um ihre Zahlungen sicher zu stellen.

Dies fordert für jeden der verschiedenen Zwecke besondere Berücksichtigungen. Bei den Lebensversicherungen gereichen die Todesfälle zum Nachtheil der Casse, hier bleibt also die Casse in Schaden, wenn nach Tabellen von zu langsamer Sterblichkeit gerechnet wurde, denn hier würden die Zahlungen in der That früher gefordert, als die Rechnung erwarten ließ. Bei Leibrenten umgekehrt sind die Todesfälle der Vortheil der Casse, also bleibt die Casse in Schaden, wenn nach zu rascher Sterblichkeit gerechnet wurde.

Davon läßt sich aber nur innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Tafeln guter Gebrauch machen, denn sonst wird im ganzen Geschäft die Ordnung der Billigkeit verrückt, und es bleibt das Beste für den jedesmaligen Zweck, möglichst genauen Tafeln zu folgen.

Hingegen die Berechnungen nach einem niedrigeren Zinsfuß, als den im Leben zu erhaltenden, gereichen der Casse jedesmal zum Vortheil, indem man ihre Einnahme geringer schätzt, als sie wirklich erfolgt. Der geringere Zinsfuß verlangt eine höhere jährliche Zahlung, um zu bestimmter Zeit die Zahlung eines bestimmten Capitals zu versichern, und eben so verlangt er eine größere Summe, um eine bestimmte Jahrrente zu kaufen.

Die besten Anstalten werden daher die, bei denen man durch diese Rechnung nach ermäßigtem Zinsfuß ausgleichen kann.

Sonst ist gegen den Entwurf der Rechnung bei Leibrenten und Lebensversicherung im Allgemeinen nichts einzuwenden, aber anders steht es mit der Rechnung für Witwencassen. Haben nicht vielleicht Verheirathete ein anderes Sterblichkeitsverhältniß, als das männliche und weibliche Geschlecht im Ganzen? Dann dürfte man hier nur die besonderen Tafeln für die Verheiratheten brauchen.

Die Lebensversicherungen.

Nach diesen Regeln sind die Lebensversicherungen für das ganze Leben die wohlthätigsten und besten unter diesen Anstalten, indem durch diese Jemand auf seinen Todesfall für seine Hinterlassenen sorgt, ohne je die eingezahlten Gelder selbst zu verlieren. Diese Gesellschaften können, wenn sie zahlreich genug sind, leicht so gegenseitig eingerichtet werden, daß bei den verhältnißmäßig geringen Verwaltungskosten mit geschickter Verwaltung die Vortheile der Unternehmung ganz den Mitgliedern der Gesellschaft selbst bleiben. Wenn nämlich die Casse nach ermäßigten Procenten rechnet, so wird sie auch bei zufällig ungewöhnlich rascher Sterblichkeit ihre Verbindlichkeiten leicht erfüllen können; in der Regel aber bedeutenden Ueberschuß behalten, den sie von Zeit zu Zeit unter die Mitglieder vertheilt, entweder, was das gleichmäßigere ist, indem sie die jährliche Prämie vermindert, oder indem sie den Werth der Policen erhöht.

Die Vortheile werden noch größer, wenn sie mit ihrer Unternehmung noch sichere Handelsspeculationen verbindet. Diese bestehen in der Regel in Lebensversicherungen auf Zeit, bei denen die Gesellschaft dem Versicherten für eine gewisse Gefahr einsteht, ohne ihm übrigens Antheil am Vermögen der Gesellschaft zuzugestehen.

Dabei ist hierbei die Uebersicht schon viel weniger gleichmäßig und der Rechnung weniger zu trauen. Daher werden hier die Rechnungen mit ermäßigten Procenten schon nothwendig, um die Casse sicher zu stellen.

Lästig wird die Theilnahme an diesen Anstalten nur denen, die das Glück haben, sehr alt zu werden. Hier, meine ich, könnte eine Verbesserung der Einrichtung getroffen werden, wenn die Bank den Reservefond etwas höher hielte und dagegen denjenigen, die eine gewisse Zeit schon gezahlt haben, entweder keine ferneren Zahlungen mehr absorderte, oder gar ihnen das versicherte Capital auszahlte, in der Weise, wie die Gesetze der Lebensversicherungsanstalt zu Gotha schon 90 Jahr als Grenze angesetzt hatten, und nun dieser Anforderung noch genauer entsprechen.

Die Leibrentenbanken.

Einfach eingerichtete Leibrentenbanken, bei denen die Bank mit jedem Einzelnen für sich rechnet, können diese Vortheile nicht anwenden, indem sie begangene Fehler nicht wieder gut machen können. Wollen sie daher, um Theilnehmer anzulocken, möglichst hohe Vortheile versprechen, so bleibt dies eine gefährdete Unternehmung, bei der man nicht nach allgemeinen Sterblichkeitstafeln rechnen darf und den Zinsfuß ermäßigen muß.

Indessen ist hier in anderer Weise leicht geholfen worden, durch die Einrichtung der Tontine, bei der die Mitglieder der Gesellschaft sich gegenseitig beerben. Hier läßt man nämlich eine hinlänglich zahlreiche Gesellschaft, am einfachsten aus einer Altersclasse zugleich und mit gleicher Einlage eines Jeden, (von der auch demselben gestattet werden kann, ein Vielfaches zu zahlen, so daß er für einige Personen gilt,) zusammentreten, für welche die Bank eine gleichbleibende Jahrrente zahlt, welche unter die jederzeit noch Lebenden gleich vertheilt wird bis zum Ableben des Letzten. Hier werden die längst Lebenden reich, und die Bank kann durch ermäßigte Interessen noch bedeutend gewinnen, auch ist die Anstalt leicht so zu ordnen, daß die Bank gar keiner von Wahrscheinlichkeiten abhängenden Gefahr ausgesetzt bleibt. Aber diese Einrichtung ist allzu selbstsüchtig, indem dabei gleichsam jeder Freund dem andern ein baldiges seliges Ende gönnt und alle früh Sterbenden ihren ganzen Einsatz verloren geben. Um daher auch solchen, die doch noch Sorge für Hinterlassene behalten, oder bei Vorsorge für einen Freund nicht gleich ihren ganzen Einsatz verloren geben wollen, den Zutritt annehmlich zu machen, hat man in den jetzt sogenannten Rentenanstalten eine nur tontinenartige Einrichtung gewählt, bei der die allzu früh Sterbenden nur die Interessen ihres Einsatzes verlieren sollen, indem man bei früheren Todesfällen den Erben so viel zurückzahlt, als die schon bezogenen Jahrrenten in absoluter Summe weniger betragen, als der Einsatz. Hier ist in der Theorie der Berechnung viel

Willkührliches. Man kann, wie vorhin, in jeder Altersclasse Jedem eine Jahrrente für das höchste Alter berechnen, die zunächst Jedem bezahlt wird, so lange er lebt; die Steigerung aber kann man dann erst nach und nach zurechnen, sowie neben der Verminderung des Einsatzcapitals bei den früheren Sterbefällen allmählich mehr Ueberschuß über die für die noch Lebenden zu fordernden Jahrrenten bleibt, welcher unter sie weiter vertheilt wird. Wenn dann endlich die jährlichen Zahlungen den Einsatz erreicht haben, so gilt nachher der noch lebende Theil der Gesellschaft als Tontine. Auf jeden Fall wird es hier nur zweckmäßig seyn, die Rechnung von Jahr zu Jahr nach den Erlebnissen und nicht voraus nach einer Theorie zu führen. Diese ermäßigten Tontineneinrichtungen werden aber dem nicht genau Rechnenden leicht täuschende Hoffnungen erregen, indem die bedeutend gesteigerten Renten nur einem sehr hohen Alter zu gute kommen.

Witwen- und Waisen-Versorgungsanstalten.

Versorgungsanstalten für die Witwen und Waisen der Staatsdiener sind für Staaten, wie die deutschen, in denen man nicht die Reichen, sondern die Tüchtigen zu Staatsdienern sucht, eine sehr wohlthätige Anstalt; aber sie werden im Staatshaushalt immer bedeutende Unkosten verursachen, wenn die Pensionen nicht gar zu kärglich ausfallen sollen.

Unsre oben gegebenen Rechnungen sind dafür gar nicht brauchbar. Die laufende Einnahme wird nämlich viel sicherer geordnet, wenn bei fester Dienstordnung und fest geregelten Gehalten aliquote Theile von jedem Gehalt für diesen Zweck zurückbehalten und nach dessen Verhältniß Pensionen zugesichert werden.

Allein da hier jeder überlebenden Frau eine Pension versprochen wird, so wird die Pension die junge Witwe oft abhalten, wieder zu heirathen, dagegen aber den Witwer leichter bestimmen, wieder eine Frau zu suchen. Deswegen werden die Pensionen sich häufen, und dies auf eine Weise, wofür weder in Rücksicht der Witwen noch der Waisen ein

Ueberschlag voraus gemacht werden kann. Eine solche Casse bedarf zu gutem Bestehen der Anstalt einen bedeutenden unabhängigen Fonds.

Für freie Witwencassen haben viele unglückliche Unternehmungen ebenfalls die großen Schwierigkeiten bewiesen. Hier versichert der Mann zwar nur seine jetzige Frau und gibt alle seine geleisteten jährlichen Zahlungen verloren, wenn die Frau vor ihm stirbt, so daß für diesen Fall grade unsere obigen Gleichungen geordnet sind. Aber die ausgedehntesten Gesellschaften werden doch nicht hinlänglich weiten Spielraum haben, um eine bedeutende Wahrscheinlichkeit zu bekommen, daß unsere Durchschnittszahlen von sicherer Anwendung blieben. Daher muß es wünschenswerth seyn, der Anstalt recht großen Wirkungskreis zu eröffnen; aber eben deswegen werden die Unternehmer so leicht verleitet, zu gute Versprechungen zu machen, welche sie nachher nicht einhalten können. Den einmal begangenen Fehler kann man hinterher nicht wieder gut machen, und so ist so manche Unternehmung dieser Art zu einem theilweisen Bankerot geführt worden, bei dem sie genöthigt wurde, den länger Lebenden, die schon so viel eingezahlt hatten, doch einen großen Theil der versprochenen Pensionen zu entziehen.

Die Anwendung der Formeln für die Waisencassen steht endlich noch viel mißlicher, indem dabei ein geregelter Ueberschlag des ganzen Geschäftes im voraus gar nicht gemacht werden kann. Nach Analogie der Witwencassen kann hier nur ein Einkauf für jedes einzelne Kind stattfinden.

Diese Unsicherheit der Uebersicht, und dann der Nachtheil, daß bei dem früheren Tode der versicherten Person die ganzen jährlichen Zahlungen für die Familie verloren sind, macht bei weitem in den meisten Fällen den Eintritt in Lebensversicherungen oder Rentenanstalten rathsamer.

Endlich der Grund, warum ich hier für die Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung diese Rechnungen zu besprechen habe, liegt nur in Folgendem. Einfach für Leibrenten und Lebensversicherungen kommt jedesmal nur

eine Wahrscheinlichkeit in Frage; hier wird sich die Durchschnittsrechnung leicht richtig stellen lassen. Sobald aber mehrere Wahrscheinlichkeiten hier in einer Rechnung verbunden werden, wo nicht Wahrscheinlichkeiten a priori, sondern nur mittlere Wahrscheinlichkeiten a posteriori in Frage stehen, wird die Sache weit unsicherer, besonders weil sich kein hinlänglich weiter Umfang wird erreichen lassen, um für jede Complexion der Verhältnisse die Bedeutung der Durchschnittszahlen zu sichern. Mag hier für die verwickeltsten Lebens- und Geschäftsverhältnisse theoretisch noch so richtig gerechnet seyn, so bleibt das Geschäft dessen, der sich auf die Resultate dieser Rechnungen verläßt, doch mehr oder weniger ein bloßes Glücksspiel.

Unsre Theoretiker (wie *Baily*) können wohl nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit Formeln für mehrere verbundene Leben unter den künstlichsten gegebenen Bedingungen von Rentenzahlungen entwerfen und berechnen; aber was wird diese Rechnung wol für eine Anwendung auf Versicherungsanstalten sichern? Ich sehe nur auf den einfachsten Fall der Witwencasse, oder der Verbindung von zwei Leben. Der Satz, von dem wir ausgingen, war, daß wenn das Alter der beiden Personen m, m' und die Frage, wie wahrscheinlich es sei, daß jede noch s Jahre lebe, diese Wahrscheinlichkeiten würden $\frac{V_{m+s}}{V_m}$ und $\frac{V_{m'+s}}{V_{m'}}$. Ferner die Wahrscheinlichkeit, daß sie dann beide noch lebten, sollte die zusammengesetzte von diesen beiden $= \frac{V_{m+s}}{V_m} \cdot \frac{V_{m'+s}}{V_m}$ seyn. Dieses hätte nun ganz sichere Bedeutung, wenn a priori von V_{m+s} weißen Kugeln gegen V_m Kugeln u. s. f. die Rede wäre; aber hier die Zahlen der Sterblichkeitstabelle sind selbst nur unsichere Durchschnittszahlen, und daher schon diese zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten etwas Unsicheres. Und wenn wir sie dann

gelten lassen, so bedeuten sie doch nur, daß, wenn wir mehrere hundert in gleichen Altern verbundene Paare neben einander hätten, für diese die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit im Durchschnitt gelten werde. Eine Versicherungsanstalt, die sich diesen Rechnungen anvertrauen will, wird sich also auf eine solche Häufigkeit der gleichen Vorkommenheiten müssen verlassen können.

Sehe ich dafür auf die Tontinen zurück, nur nach dem einfachsten Fall. Es treten hundert Personen von gleichem Alter zu einer Tontinengesellschaft zusammen, wie haben sie mit der Bank zu rechnen? Die Theorie gibt eine Formel der Rente für das längste Leben so verwickelt, daß sie sich nur annäherungsweis berechnen läßt; aber ich sage gegen die ganze Theorie: der Bank gegenüber zählt die ganze Gesellschaft nur wie eine Person, will sie also ihr Geschäft nach Wahrscheinlichkeit ordnen, so muß sie auf viele hundert Tontinengesellschaften neben einander rechnen können, sonst spielt sie ein unsicheres Glücksspiel. Deswegen scheinen mir Tontinen nur so gut geordnet zu werden, daß die Bank an den Unsicherheiten der Wahrscheinlichkeit gar keinen Antheil nimmt. Die Bank lasse sich ein bestimmtes Kapital einzahlen, und berechne daraus, für ihre Sicherheit und ihren Gewinn nach ermäßigtem Zinsfuß, eine Jahrrente, durch welche in bestimmter Zeit das Capital mit den Zinsen der Gesellschaft zurückgezahlt werde, welche Jahrrente dann die jedesmal noch Lebenden unter sich gleich vertheilen. Die bestimmte Zeit, bis zu welcher die Zahlungen erfolgen sollen, sei kein zu hohes Lebensalter der Gesellschaft, etwa 75 Jahr. Nach dieser Zeit hätte die Bank ihre Schuldigkeit erfüllt, und es wäre im Vertrag nur noch vorauszubestimmen, wohin die letzten Zahlungen zu entrichten seyen, wenn die Gesellschaft zuvor schon ausgestorben wäre.

Der Vortheil der gegenseitigen Beerbungen wird sich dann auch, zur Vermeidung des Risico der Bank, auf gar vielerlei Weise mit andern Anordnungen der Einzahlung in

Verbindung mit Lotterien (wie die Hamburger Versorgungs=tontine) und auf andere Art sicher anwenden lassen.

Wegen des Unterschiedes zwischen Wahrscheinlichkeit a posteriori und a priori scheinen mir aber die künstlichen, nach den Potenzen des Binomium geführten Rechnungen von Tetens über das Risico bei Witwencassen, sowie Jakob Struve's Erläuterungen dazu von keinem sichern Gebrauch.

Ein einfacher hierher gehörender Fall betrifft die Bestimmung, wie ein solcher auf Wahrscheinlichkeit abgeschlossener Vertrag, wenn man es wünscht, vor dem Ablauf seiner Zeit wieder aufzuheben sei. Hier z. B. in den Lebensversicherungs=contract gleich die Bedingung zu stellen, daß eine Police verloren seyn solle, sobald die Prämie nicht auf den Tag eingezahlt wird, ist eine etwas gewaltsame Maaßregel. Das rechtlich Richtigste wäre hier, selbst bis auf den Todesfall, dem Versichernden mit Zinsen auf Zinsen seine Schuld an die Bank zu berechnen, und diese gegen die versicherte Summe abzurechnen, so daß die Bank an die Erben den Rest auszahlte. Wenn der Schuldner sehr alt würde, könnte es dann auch treffen, daß er bei seinem Tode der Bank noch schuldig bliebe.

Aber auf diese Weitläuftigkeiten wird sich die Gesellschaft nicht einlassen mögen, man rechnet daher so, daß für den Tag, an dem der Contract aufgehoben wird, nach dem wahrscheinlichen Lebensalter des Versichernden einerseits bestimmt wird, was die versicherte Summe jetzt werth sei, andrerseits, was die Anforderungen der Bank an die zukünftigen Prämienzahlungen jetzt betragen. Dies ist aber nur ein billiger Vergleich und keine rechtlich nothwendige Bestimmung, vorzüglich weil sie die Bestimmung nach Wahrscheinlichkeit nicht im Durchschnitt, sondern nur auf den einzelnen Fall anwendet.

Viertes Kapitel.

Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse, der Rechtsentscheidungen und der Wahlen.

§. 37.

Poisson *) hat in seinem großen Werke sehr interessante Nachweisungen über die Wahrscheinlichkeit der Rechtsentscheidungen, vorzüglich bei strafrechtlichen Verhandlungen, gegeben, in denen er zeigt, daß auch bei diesen moralischen Lebensverhältnissen, wenn die Sitten und die Einrichtungen der Gerichte gleich bleiben, sich bald constante Verhältnisse ergeben, nach denen die Häufigkeit gewisser Verhandlungen, gewisser Verbrechen wiederkehren, und nach denen die Zahl der Verurtheilten und Freigesprochenen gegen die der in Untersuchung gekommenen steht. Vortreffliche Belege zu des la Mettrie l'homme machine!

Aus den comptes généraux de l'administration de la justice criminelle von 1825 bis 1833 ergibt sich, daß Frankreich schon ein hinlänglich großes Reich ist, um für die Wechselfälle der Gerichtsverhandlungen in jährlichen Durchschnitten auf constante Verhältnisse zu führen, während für einzelne Departements die Durchschnitte sich noch sehr veränderlich zeigen. Jährlich werden vor den Assisen in Frankreich 5000 Processe geführt und darin 7000 Angeklagte vorgeführt. Nun war die Gerichtsordnung von 1825 bis 1830 unverändert, die Geschwornen entschieden mit wenigstens 7 gegen 5 Stimmen mit dem Vorbehalt einer Dazwischenkunft des Gerichtshofes für den Fall der geringsten Mehrzahl der Stimmen. Bei dieser Anordnung wurden jedes Jahr von 100 Angeklagten 61 veurtheilt und 39 freigesprochen, mit nur einer Aus-

*) Poisson, recherches sur la probabilité des jugemens en matière criminelle et en matière civile.

nahme von 38 und einer von 40. Als nachher für 1831 die Dazwischenkunft des Gerichtshofes aufgehoben und die geringste Mehrzahl auf 8 gegen 4 Stimmen gesetzt wurde, vermehrte sich die Zahl der Freigesprochenen auf 46 gegen 54 Verurtheilte im Jahr 1831. Dies war genau nach dem Verhältniß der 7 von Hundert, über welche zuvor mit der geringsten Mehrheit der Stimmen 7 gegen 5 entschieden worden war. Im Jahr 1832 war dann das gerichtliche Verfahren selbst darin verändert, daß zur Milderung der Strafe die Milderungsgründe genau berücksichtigt werden sollten. Diese Milderung der Strafe mußte nun wieder das Schuldig leichter aussprechen lassen, und so fielen, mit Beibehaltung der geringsten Mehrzahl 8 zu 4, die Verurtheilungen jetzt 59 vom Hundert gegen 41 Freisprechungen. Diese Behandlung der gerichtlichen Verhandlungen durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur nach dem Gesetz der großen Zahlen fällt also ganz mit den vorigen in Rücksicht der Sterblichkeit befolgten Methoden zusammen. Dagegen verbindet Poisson aber diese Nachweisungen noch immer mit einer alten traditionell gewordenen Lehre über diese Gegenstände, welche ich für die verunglückteste Partie in allen diesen Untersuchungen halte.

Wenn wir bei allen solchen Lebensverhältnissen, wie Zeugenaussagen, Richtersprüchen u. s. w., in einem bestimmten Kreise sehr viele Beobachtungen sammeln, so werden sich nach dem Gesetz der großen Zahlen constante Verhältnisse ergeben für die mittleren Durchschnittszahlen der Erfolge, und es wird interessant, diese zu beobachten, indem die allmähliche Veränderung derselben immer anzeigen wird, daß in den Ursachen dieser Erfolge Veränderungen eingetreten seyen, welche man dann aufzusuchen veranlaßt seyn wird. Aber mit solchen Durchschnittszahlen selbst eine künstliche weitere Rechnung fortzuführen, um die Gesetze abgeleiteter Erfolge darnach zu finden, dies wird nicht rathsam seyn. Darin scheinen mir hier nun manche fehlerhafte Theorieen von ausgezeichneten Mathematikern verfolgt zu seyn. Demgemäß habe ich erst gegen eine herkömmliche Lehre von der Wahrscheinlichkeit der

Zeugenaussagen, und dann gegen eine ähnliche von der Wahrscheinlichkeit der richterlichen Entscheidungen zu sprechen.

Die erste Lehre vergleicht einen Zeugen einem Würfel von $v + m$ Seiten, unter denen v die Wahrheit sagen und m irren. Lacroix berichtet genau über die darauf gegründete Rechnung, und Laplace hat die Theorie noch genauer ausgeführt, alle aber wol nur aus Freude an den analytischen Formeln.

Wäre nun ein Zeuge ein solcher Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit seiner Wahrhaftigkeit $= \frac{v}{v+m}$, die seiner Unwahrhaftigkeit $= \frac{m}{v+m}$, und wenn nun ein zweiter Zeuge v' Seiten wahr und m' Seiten falsch hätte und beide sagten über dieselbe Thatsache aus, so glichen die Wahrscheinlichkeiten denen bei zwei Würfeln, die mit einander geworfen würden, also wäre die Wahrscheinlichkeit, daß sie mit einander übereinstimmen,

$$\frac{v\,v'}{(v+m)\,(v'+m')} \text{ für die Wahrheit,}$$

$$\frac{m\,m'}{(v+m)\,(v'+m')} \text{ für die Falschheit.}$$

Eben so die Wahrscheinlichkeit, daß sie sich widersprechen

$$\frac{v\,m'}{(v+m)\,(v'+m')} \text{ und } \frac{v'\,m}{(v+m)\,(v'+m')}.$$

Stimmen sie nun aber wirklich überein, so bleiben nur die beiden ersten Fälle, und wir haben

$$\frac{v\,v'}{v\,v' + m\,m'} \text{ für die Wahrheit,}$$

$$\frac{m\,m'}{v\,v' + m\,m'} \text{ für die Falschheit.}$$

Widersprechen sie sich dagegen, so haben wir eben so, weil nur die beiden letzten Ereignisse möglich bleiben, die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{v\,m'}{v\,m' + m\,v'} \text{ und } \frac{m\,v'}{v\,m' + m\,v'},$$

daß die Aussage des ersten oder die des zweiten wahr sei.

Leicht setzt sich dies für eine beliebige Anzahl von Zeugen fort. Sind diese nun alle gleich glaubwürdig, so wäre $v = v' = v''$ u. s. w., $m = m' = m''$ u. s. f., und wenn ihre Anzahl p ist, und ihre Aussagen übereinstimmen, so ergibt sich für die Wahrheit die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{v^p}{v^p + m^p}$$

für die Falschheit

$$\frac{m^p}{v^p + m^p}.$$

Dies erste ist

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{m}{v}\right)^p},$$

welches, wenn $v > m$, der Gewißheit immer näher kommt.

Wenn aber p die Thatsache behaupten und q sie verneinen, so haben wir

$$\frac{v^p m^q}{v^p m^q + m^p v^q} \text{ für, und } \frac{m^p v^q}{v^p m^q + m^p v^q} \text{ gegen.}$$

Theilt man diese Brüche in Zähler und Nenner mit $v^q m^q$, so werden sie

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}} \text{ und } \frac{m^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}}$$

als Wahrscheinlichkeiten, die der Uebereinstimmung von $p - q$ Zeugen entsprechen. Also was drei gleich sichere Zeugen gegen einen aussagen, soll um nichts sicherer seyn, als was **100** Zeugen gegen **99** aussagen. Dies wird Niemand zugeben, hier muß ein Fehler in der Formel seyn.

Doch wir gehen noch weiter. Einer berichtet, was er von einem Andern erfahren hat, und was dieser Andere von einem Dritten hat, so finden bei dieser Art Zeugnisse, welche Traditionen heißen, alle die Combinationen statt, die wir zuerst für zwei Zeugen neben einander angaben.

Davon entsprechen die beiden letzten Wahrscheinlichkeiten der Unwahrheit, weil nur einer der beiden Zeugen lügt. Denn wir nehmen an, daß nur in contradictorischen Behauptungen nach Ja oder Nein gefragt werde, dann sagt die Doppellüge die Wahrheit und wir haben bei zwei Zeugen

$$\frac{v v' + m m'}{(v + m)(v' + m')} \text{ für}$$

$$\frac{v m' + m v'}{(v + m)(v' + m')} \text{ wider,}$$

wobei, wenn beide v größer, oder beide kleiner als ihre m sind, immer das erste überwiegt, indem

$$v v' + m m' - v m' - m v' = (v - m)(v' - m')$$

welches Product dann immer positiv bleibt.

Nehmen wir nun endlich p gleich wahrhafte Zeugen in einer Tradition verbunden, so enthält die Entwicklung des Binomium $(v + m)^p$ alle Combinationen von Wahrheit und Irrthum, die vorkommen können. Aber unser Satz, die Doppellüge ist Wahrheit, läßt alle grade Potenzen von m für und die ungraden wider entscheiden. Wir haben

$$\frac{v^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} v^{p-2} m^2 + \ldots\ldots}{(v + m)^p} \text{ für}$$

$$\frac{\frac{p}{1} v^{p-1} m + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{p-3} m^3 + \ldots\ldots}{(v + m)^p} \text{ wider.}$$

oder kürzer

$$\frac{(v + m)^p + (v - m)^p}{2(v + m)^p} \text{ für}$$

$$\frac{(v + m)^p - (v - m)^p}{2(v + m)^p} \text{ wider.}$$

Dies ist die Grundlage der Rechnung, durch deren Ausführung wir uns gegen unzuverlässige Zeugnisse und Traditionen sollen warnen lassen. Ich meine aber, diese Rechnung

sollte in der Wissenschaft billig als bedeutungslos ganz unterdrückt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Zeugen ist gar keine berechenbare Wahrscheinlichkeit, sondern eine intensive Größe, die sich gar nicht auf Zahlen bringen läßt, einmal weil sie, aus qualitativ verschiedenen Theilen zusammengesetzt, sich nicht auf einen gleichartigen Grad summiren läßt, und dann, weil sie selten einen constanten Werth behält. Allerdings kann ich, wenn ich einen Zeugen (einen Berichterstatter, einen Geschichtschreiber) sehr oft höre und seine Zeugnisse prüfen kann, ihm einen verhältnißmäßigen Grad seiner Zuverlässigkeit $= \frac{v}{v + m}$ nach dem Verhältniß seiner richtigen und unrichtigen Angaben zuzählen, dem er auch entsprechen wird, so lange seine Gewohnheiten und der Kreis der Gegenstände, über die berichtet wird, dieselben bleiben; aber dies ist nur eine mittlere Wahrscheinlichkeit a posteriori, nach der verschiedene Zeugen nicht mit Würfeln mit weißen und schwarzen Seiten verglichen werden können. Höre ich sie neben einander, so rollen sie nicht wie Würfel neben einander hin; höre ich sie nach einander, so bilden sich keine zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten a priori, sondern sie werden, wenn sie gleiche Ansichten, Zuneigungen und Abneigungen haben, mit einander, wenn widerstreitende, gegen einander sprechen. Weiß ich aber gar nicht, wie sie gegen einander stehen, so kann ich auch den Werth ihrer verbundenen Aussagen gar nicht schätzen. Alle zusammengesetzten Formeln im Vorigen haben also keine Gültigkeit.

Die richtige Beurtheilung von Zeugenaussagen beruht auf durchaus andern Gründen. Ist ein Bericht über eine Thatsache in Frage, so steht das Urtheil zu höchst unter der leitenden Maxime einer philosophischen Induction, welche entscheidet, ob die angebliche Thatsache möglich ist, oder nicht, so z. B. bei der Erzählung von Wundern, Geistererscheinungen, Fall von Meteorsteinen. Ist dann die Thatsache möglich, so kommt es zunächst auf die unberechenbare Aufrichtigkeit und Einsicht der Augenzeugen an. So hat die Wissen-

schaft den ganzen Schatz von Geschichte und Erfahrung durch die ernste Wahrhaftigkeit einsichtsvoller Männer vollkommen sicher gestellt erhalten. Hingegen bei der Verbreitung gemeiner Gerüchte, wo den ersten Erzählenden an der Wahrheit der Sache wenig gelegen ist, wo sie nur von der Neugierde, der Liebe zum Sonderbaren oder Wunderbaren, zur Lächerlichkeit oder zum Scandal getrieben, oder auch von Partheilichkeit geführt werden, wird leicht aus dem Floh ein Elephant, und aus der Erzählung folgt nichts für die Wahrheit der Thatsache.

Ferner der Verlauf der Traditionen folgt einem ganz andern Gesetz, am meisten in Widerspruch mit jener angeblichen Rechnung. Wenn eine Erzählung einmal die ausgebreitete Theilnahme einer großen Gesellschaft gewonnen hat, so kommt sie unter einen festen Schutz der Gewohnheit, welche sie sicher bewacht. Erzählt die Amme dem Kinde das Mährchen einmal anders, als das andere Mal, so wird sich das Kind gleich gegen die Aenderung wehren. So erhalten sich in treuer Gleichförmigkeit die Volkssagen, die religiösen Mythen, die Mährchen bis zum Kindermährchen, wie wir sie so mannichfaltig gleichgestaltet von uns nach Syrien, Persien, Arabien, Indien verbreitet finden. Das Unsichere bleibt hier nur die Verbindung der Tradition mit der angeblichen Thatsache selbst, welche bei der festesten Tradition oft doch gar nichts für sich hat. Nicht nur fragt sich, wo ist die Sache geschehen? hat Tell oder Palnatoke seinem Sohne den Apfel vom Kopfe geschossen? ohne sichere Antwort, sondern oft, wie bei den Lebensgeschichten und Wunderthaten der Propheten und Schwärmer, bleibt sie völlig ohne Grund, ein Spiel des Traumes *).

§. 38.

Doch mit dieser Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen bespreche ich eigentlich nur die Grundlage ei-

*) Vergl. mein System der Logik. §. 122.

ner Lehre, deren Unanwendbarkeit die meisten Lehrer zugeben. Der mathematische Enthusiasmus des Condorcet und seiner Freunde hat aber die Rechnung noch weiter ausgedehnt auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, ob bei Entscheidungen nach Stimmenmehrheit in Versammlungen und Gerichtshöfen die Wahrheit getroffen sei oder nicht, und gar zu der Meinung verführt, daß davon Anwendungen im Leben gemacht werden können. Leider aber sind diese Rechnungen nur Ausführungen über den eben verworfenen Grundlagen, und theilen denselben Fehler, die wahrscheinliche Sicherheit der Meinung eines Mannes wie eine berechenbare Wahrscheinlichkeit anzusehen.

Wir müssen diese ganze Lehre aus den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung streichen, und behalten für die Rechnung nur jene Uebersichten des gleichförmigen oder ungleichförmigen Verlaufes nach dem Gesetz der großen Zahlen, ohne dadurch für die besondern Zwecke einer solchen Staatseinrichtung Belehrungen zu gewinnen.

Um dies deutlicher zu machen, betrachte ich die neueste Grundlage der Rechnung über die Wahrscheinlichkeit bei richterlichen Urtheilen.

Laplace hat die Grundlage dieser Lehre recht scharfsinnig geordnet. Alle richterlichen Urtheile, besonders die strafrechtlichen, können nur auf moralische Beweise gegründet werden, und diese sind nur von wahrscheinlicher Entscheidung. Der Spruch der Richter oder Geschworenen kann also eigentlich nicht entscheiden: unschuldig oder schuldig, sondern nicht überführt oder überführt. Aber nach welchem Maaße sollen wir das Gewicht des Beweises messen, welches zur Ueberführung hinlangt? Laplace läßt dies abhängen von der Beantwortung der Frage: hat der Beweis des Verbrechens des Angeklagten einen so hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, daß die Bürger den Irrthum der Gerichte weniger zu befürchten haben, wenn er unschuldig ist und verdammt wird, als seine eigenen und der Unglücklichen neue Verbrechen, welche das Beispiel seiner Ungestraftheit kühn machen würde,

wenn er strafbar wäre und losgesprochen würde? Also, wenn die Beweise eine solche Kraft haben, daß das Product aus dem zu befürchtenden Irrthum in dessen geringe Wahrscheinlichkeit kleiner ist, als die Gefahr, welche aus der Ungestraftheit des Verbrechens entspringen würde, so wird der Urtheilsspruch um des Wohls der Gesellschaft willen erforderlich.

Eine durchschnittliche Gleichung zwischen diesen beiden Producten wird aber die Rechnung nie darstellen können, deswegen beschränkt man sich nur darauf, mittlere Werthe für den zu befürchtenden Irrthum bei gewissen Einrichtungen oder Entscheidungsweisen der Gerichte zu suchen. Hier findet nun Poisson die Verfahrungsart des Laplace zu willkührlich, und sucht dann selbst nach anderer Ansicht eine Theorie ohne alle Hypothese zu entwickeln, mit der guten Vorbemerkung: über die wahrscheinliche Richtigkeit eines bestimmten Richterspruches könne die Rechnung nichts entscheiden, nur die mittlere Sicherheit des richterlichen Verfahrens im ganzen Volke stehe in Frage, und dafür gebe er eine Theorie.

Er spricht die Grundlage dieser Theorie in den zwei Sätzen aus: das Product der Wahrscheinlichkeit des Irrthums bei irgend einem Spruch der Verurtheilung in die Wahrscheinlichkeit, daß die Verurtheilung werde ausgesprochen werden, ist das wahre Maaß der Gefahr, welcher die Gesellschaft jeden unschuldig Angeklagten aussetzt; und das Product der Wahrscheinlichkeit des Irrthums bei einer Freisprechung in die Wahrscheinlichkeit, daß die Freisprechung erfolgen werde, ist das Maaß der Gefahr, welche die Gesellschaft selbst läuft.

Unter diesen Grundsätzen sucht er nun seine Theorie ohne Hypothesen zu entwickeln, vorausgesetzt, daß ihm die Erfahrung zwei besondere Constanten gegeben habe, welche von dem sittlichen Zustande des Landes, dem Gerichtsverfahren und der Geschicklichkeit der Beamten abhängen. Die erste ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Geschworner, den wir zufällig aus der Liste eines Assisenhofes ergriffen, sich bei seiner Stimmengebung nicht irren werde. Die an-

dere ist die Wahrscheinlichkeit, welche vor Anfang der Untersuchung besteht, daß ein Angeklagter schuldig sei.

Nun wollen wir ihm einmal zugeben, daß er seine Theorie geben könne, wenn er im Besitze dieser Constanten ist; auch müssen wir es ihm lassen, daß es jederzeit eine mittlere Rechtlichkeit und mittlere Einsicht der Richter zur Bestimmung des ersten, und eine mittlere Wahrscheinlichkeit der Schuld eines Angeklagten gebe; aber es wird immer eine Chimäre bleiben, dies aus der Erfahrung nach Zahlen zu bestimmen.

Dafür will ich genauere Erläuterungen geben.

Wenn in einem Volke von gleich bleibender Bildung und Lebensordnung eine große Anzahl Angeklagter $= \mu$ gerichtet werden, so werden diese nach dem Gesetz der großen Zahlen in einem constanten Verhältniß schuldig und nicht schuldig seyn. Es sei $\mu = p + q$; p seyen schuldig und q nicht schuldig, so ist das Verhältniß $\frac{p}{p+q} = k$ und $\frac{q}{p+q} = 1 - k$ ein constantes.

Wenn nun ein Richter alle diese entschiede, welcher die Eigenschaft hätte, immer in v Fällen die Wahrheit zu treffen und in m Fällen zu irren, so wäre $\frac{v}{v+m} = u$ ein constantes Verhältniß seiner Zuverlässigkeit und $\frac{m}{v+m} = 1 - u$ ein constantes Verhältniß seiner Unzuverlässigkeit.

Fragen wir nun, wie oft wird dieser Richter verurtheilen und wie oft freisprechen, so zeigt sich, von den p Fällen wird er nach dem Verhältniß $u : 1 - u$, pu richtig verurtheilen, $p(1 - u)$ unrichtig freisprechen; ferner von den q Fällen qu richtig freisprechen und $q(1 - u)$ unrichtig verurtheilen. Also ist das Verhältniß, nach dem er verurtheilt, $= \gamma = ku + (1 - k)(1 - u)$, und das, nach dem er freispricht, $1 - \gamma = (1 - k)u + k(1 - u)$.

Nehmen wir nun an, daß mehrere Richter, die nach demselben Verhältniß $v : m$, treffen oder fehlen, jedoch nicht nach derselben Beurtheilung der einzelnen Fälle, sondern so, daß

sie ganz zufällig zusammentreffen und dabei ganz unabhängig von einander urtheilen, so werden bei sehr vielen Fällen alle Wechselfälle ihres Zusammentreffens vorkommen, und diese alle, wenn die Anzahl der Richter $= n$, nach den Gliedern der Potenz des Binomium $(u + [1 - u])^n$ sich in die Fälle scheiden, ob sie einstimmig oder nach bestimmter Theilung der Stimmen treffen oder fehlen. Für eine bestimmte Ungleichheit der Stimmen werden sie also nach dem allgemeinen Glied

$$ {}^n\mathfrak{B}^i\, u^{n-i} (1-u)^i = {}^n\mathfrak{B}^i\, u^i (1-u)^i\, u^{n-2i} $$

treffen und nach

$$ {}^n\mathfrak{B}^i\, u^i (1-u)^{n-i} = {}^n\mathfrak{B}^i\, u^i (1-u)^i \,.\, (1-u)^{n-2i} $$

fehlen.

Dann werden sie also verurtheilen nach dem Verhältniß

$$ \gamma_i = {}^n\mathfrak{B}^i \left(k\, u^{n-i} (1-u)^i + (1-k)\, u^i (1-u)^{n-i}\right) $$

und freisprechen nach dem Verhältniß

$$ {}^n\mathfrak{B}^i \left(k\, u^i (1-u)^{n-i} + (1-k)\, u^{n-i} (1-u)^i\right). $$

Es ist γ_i also die wahrscheinliche Verhältnißzahl der Verurtheilungen mit der Stimmenmehrheit $(n - i)$. Setzen wir c_i als die wahrscheinliche Verhältnißzahl aller Verurtheilungen mit wenigstens dieser Mehrheit, so ist c_i die Summe aller Werthe von γ_i von $i = o$ bis zu einem bestimmten Werth von i, oder die Summe der Glieder von $(u + [1 - u])^n$ von u^n bis $u^{n-i} (1-u)^i$ mit k und der Glieder von $(1-u)^n$ bis $(1-u)^{n-i}\, u^i$ mit $(1-k)$ verbunden.

Wenn nun γ_i und c_i durch die Beobachtung bekannt wären, so hätten wir also zwei Gleichungen, um k und u zu bestimmen.

Allein es zeigt sich gleich, daß in diesen Formeln etwas Falsches sei, denn wenn wir nur für eine bestimmte Mehrheit der Stimmen rechnen, so verhalten sich die Fälle treffen und fehlen nur wie

$$u^{n-2i} : (1-u)^{n-2i}$$

also sind die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{u^{n-2i}}{u^{n-2i} + (1-u)^{n-2i}} \text{ und } \frac{(1-u)^{n-2i}}{u^{n-2i} + (1-u)^{n-2i}}.$$

Dies gibt z. B. für $n = 12$ und $u = 3/4$ bei der Stimmenmehrheit 7 : 5

$$792 \,.\, (3/4 \,.\, 1/4)^5 \,.\, 3/4^2 \text{ für und}$$

$$792 \,.\, (3/4 \,.\, 1/4)^5 \,.\, 1/4^2 \text{ wider,}$$

das heißt, das Verhältniß wäre 9 : 1 und der wahrscheinliche Irrthum betrüge $1/10$. Aber dasselbe bleibt auch, wenn n noch so groß wäre, falls wir den Unterschied $n - 2i$ gleich lassen. Also 501 Stimmen gegen 499 entschieden eben so sicher, als 7 gegen 5. Dies kann Niemand zugeben. Deswegen suchte Condorcet eine Verbesserung der Lehre. Er rügte den Fehler, daß man fälschlich u hier constant genommen habe, wodurch es keinen Durchschnittswerth bezeichnet und also für wahrscheinliche Bestimmungen nicht paßt, auch wurde im Allgemeinen bemerkt, daß man diese Formeln nur für durchschnittliche Bestimmungen anwenden dürfe.

So macht denn Condorcet den Vorschlag, wenn die Zuverlässigkeit der einzelnen Richter zwischen den Grenzen a und b liege, die mittlere Wahrscheinlichkeit, daß von n Richtern, $n - i$ die Wahrheit treffen und i irren, nach der Formel §. 18. durch

$$\frac{{}^{n-i,\,i}S_b - {}^{n-i,\,i}S_a}{{}^{n-i,\,i}S_1}$$

zu messen. Laplace folgte diesem Gedanken und bestimmte wol sehr zulässig, daß die Grenzen a und b am weitesten zwischen $1/2$ und 1 genommen werden müssen, denn die Zuverlässigkeit $1/2$, die des blinden Looses, ist hier doch das geringste Vorauszusetzende. Daher ist die Formel

$$\frac{{}^{n-i,\,i}S_1 - {}^{n-i,\,i}S_{1/2}}{{}^{n-i,\,i}S_1}$$

$$\text{oder } 1 - \frac{{}^{n-i,\,i}S_{1/2}}{{}^{n-i,\,i}S_1}\text{, wobei}$$

$$\frac{{}^{n-i,\,i}S_{1/2}}{{}^{n-i,\,i}S_1}$$

die mittlere Wahrscheinlichkeit des Fehlers für jeden Werth von n und i. Setzt man nun $n = 12$ und für i nach und nach die Werthe 0 bis 5, so ergibt sich erstens für die einstimmige Entscheidung (§. 18. 1.) $i = o$, also ${}^{12}S_1 = \frac{1}{13}$, ${}^{12}S_{1/2} = \frac{1}{13 \,.\, 2^{13}}$. Also der Fehler $= \frac{1}{2^{13}}$.

Dann z. B. für $i = 3$, ${}^{9,3}S_1 = \frac{3!}{10\ldots.13}$, ${}^{9,3}S_{1/2} = \frac{1}{2^{13}}\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10.11} + \frac{3.2}{10.11.12} + \frac{3!}{10\ldots13}\right)$.

Also hier der Fehler $= \frac{1}{2^{13}}(286 + 78 + 13 + 1) = \frac{378}{8192}$.

Oder nach der Reihe für $i = 0$, bis $i = 5$ die Fehler $\frac{1}{8192}$, $\frac{14}{8192}$, $\frac{92}{8192}$, $\frac{378}{8192}$, $\frac{1093}{8192}$, $\frac{2380}{8192}$.

Aber gegen die Anwendung dieser Formel wenden wir mit Poisson leicht ein, daß sie ihren mittleren Irrthum nur von dem Verhältniß der Stimmen abhängig macht, ohne auf die Tüchtigkeit der Richter zu achten, sie kann daher auch zu keiner Anwendung genügen, und daß sie zugleich alle Grade der Tüchtigkeit von $1/2$ bis 1 gleich möglich setzt. Sie entscheidet also jedesmal für eine mittlere Tüchtigkeit $= 3/4$.

Dagegen will nun Poisson besser helfen, und führt die analytischen Formeln weitläuftig künstlich aus, um bestimmte Werthe von k und u für die Anwendung einzuführen. Aber wie soll das gelingen? Um zum Beispiel für ganz Frankreich, alle Verbrechen zusammengerechnet, und zwar für die sechs Jahre 1825 bis 1830 diese Constanten zu bestim-

men, hat er keine andere Thatsachen, als die Zahlen der jährlich Verurtheilten und Freigesprochenen, und dann die Bestimmung, daß das Urtheil von 12 Geschwornen nach Mehrheit der Stimmen gesprochen wurde. Darin liegt ja gar keine Thatsache, welche etwas über die Richtigkeit der Urtheile entschiede. Man kann doch wieder nur auf die von ihm richtig verworfene Vergleichung nach verschiedener Mehrheit der Stimmen zurückkommen. Da den Geschwornen jedesmal der gleiche Thatbestand vorgelegt wird, so werden sie, wenn sie mit gleichem Scharfsinn nach denselben Maximen der Beurtheilung entscheiden, jedesmal einstimmig sprechen; aber wie groß dieser Scharfsinn und wie richtig diese Maximen sind, liegt nicht mit darin, und eben so läßt sich die Theilung der Meinungen nicht zur Abschätzung der Richtigkeit brauchen.

Sehen wir ihm nun zu, wie er die Rechnung führt. Sei μ die Anzahl aller in einem bestimmten Bereich Angeklagten; a_i die Anzahl aller davon Verurtheilten mit wenigstens $n - i$ Stimmen; b_i dagegen die Anzahl der nur mit $n - i$ Stimmen Verurtheilten, so geben die Tabellen der sechs Jahre unmittelbar $\frac{a_5}{\mu} = c_5$; die von 1831 $\frac{a_4}{\mu}$ und also die Differenz beider $\frac{b_5}{\mu} = \gamma_5$. Dort wird $\frac{a_5}{\mu} = c_5 = 0{,}61$; $\frac{b_5}{\mu} = 0{,}07$.

Hieraus berechnet er nun k und den mittleren Werth von u.

Den mittleren Werth von u bekommen wir nach Laplace in der von Poisson getadelten Weise rein theoretisch $= 0{,}75$. Poisson findet 0,749, da scheinen die Thatsachen wenig zur Bestimmung gethan zu haben.

Der Werth von k muß um die Differenz der unrichtig Verurtheilten und der unrichtig Freigesprochenen größer seyn als c. Er berechnet aus $c = 0{,}61$, $k = 0{,}639$.

Und nun die Hauptsache; diese Berechnung beruht nur

auf den obigen Gleichungen für γ_i und c_i *), aber diese folgen ja nur aus der alten falschen Auffassung der Lehre, und in ihnen ist ja u kein Mittelwerth, wie es hier seyn soll, sondern ein constanter, für alle Richter gleicher. Ob da nun gleich Poisson durch das Gesetz der großen Zahlen künstlich beweist, daß sie durchschnittlich im Allgemeinen gültig bleiben würden, so können wir doch schon die Gleichungen selbst, für den constanten Werth von u, nicht zugeben, denn der wahre Fehler ist, daß man die Stimmen wie Würfel nur zufällig zusammentreffen und wie Würfel unabhängig von einander rollen läßt. Alle Geschwornen werden ja von einem Untersuchungsrichter geleitet und berathen sich mit einander, es werden immer die ausgezeichneten die Andern führen, und also wird die ganze Verhandlung zum Guten und Schlimmen von ganz andern Gesetzen abhängen, als die Analogie dieses Würfelspiels zeigt.

Wer indessen Lust hat, kann gern bei Poissons Zahlen bleiben, denn die Beobachtung zeigt weder ein u noch k, er kann also weder Bestätigung erhalten, noch widerlegt werden.

Wir aber sehen ein, daß die Zuverlässigkeit der Richtersprüche nur von dem gesunden Urtheil und der Rechtlichkeit

---

*) Für n = 12 haben wir

$$\gamma_5 = 792 \left[k u^7 (1-u)^5 + (1-k) u^5 (1-u)^7 \right]$$

und

$$c_5 = k \left(u^{12} + 12 u^{11} (1-u) + 66 u^{10} (1-u)^2 + 220 u^9 (1-u)^3 + 495 u^8 (1-u)^4 + 792 u^7 (1-u)^5 \right) + (1-k) \left((1-u)^{12} + 12 (1-u)^{11} u + 66 (1-u)^{10} u^2 + 220 (1-u)^9 u^3 + 495 (1-u)^8 u^4 + 792 (1-u)^7 u^5 \right).$$

Diese Gleichungen im Allgemeinen zu behandeln, würde sehr weitläuftig seyn, da wir aber schon wissen, daß k nur wenig größer, als 0,61 seyn könne, und der Werth von u zwischen ½ und 1 fallen müsse, so lassen sich durch Probiren leicht zwei zusammenpassende Werthe für u und k finden, wenn man in der ersten Gleichung u beliebig nimmt und dafür k bestimmt. So stimmen die angegebenen Werthe nach beiden Gleichungen zusammen.

der Richter abhängt und nach gar keiner mathematischen Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann. Also ganz ohne diese analytischen Theorien geben wir nur den mittleren Werthen aus der Beobachtung den Werth, und dafür könnte noch mehr geschehen, wenn die Tabellen die Zahlen für alle Stufen der Stimmenmehrheit gesondert angäben. Die weitere Ausführung von Poissons Theorie zur Berechnung der wahrscheinlichen Richtigkeit von Verurtheilungen und Freisprechungen beruht dann ganz auf der Unterlage dieser Gleichungen für k und u.

So sehr es uns also leid seyn mag, die große Kunst und Mühe, welche auf diese Rechnungen verwendet worden sind, und besonders die Nettigkeit und Klarheit von Poissons Untersuchung im Stich zu lassen, so sind wir doch genöthigt zu behaupten, daß nur die thatsächlichen mittleren Werthe der Verhältnißzahlen, hier von Verurtheilungen und Freisprechungen, ihre Gültigkeit behaupten, die Ermessungen des Grades der Richtigkeit der Entscheidungen aber immer Täuschungen bleiben.

Alle diese Untersuchungen wollen der Staatskunst dienen, um zu bestimmen, wie solche Versammlungen am besten zu ordnen sind, durch welche Beschlüsse nach Mehrheit der Stimmen zu fassen sind. Die beiden allgemeinen Fragen sind dann, wie zahlreich soll die Behörde besetzt seyn und mit welcher Mehrheit der Stimmen soll sie entscheiden.

Was zuerst die Mehrheit der Stimmen betrifft, so versteht es sich von selbst, daß schlechthin die Mehrzahl entscheiden müsse bei allen Behörden, welche auf jeden Antrag einen bestimmten Bescheid geben müssen, wie Verwaltungsbehörden und Civilgerichte. Anders steht es aber bei den gesetzgebenden Versammlungen und Strafgerichten. Bei den ersten bleibt es besser beim Alten, wenn keine hinlänglichen Gründe für Neuerungen vorhanden sind; bei den andern wird man lieber einige Schuldige frei lassen, als einen Unschuldigen verurtheilen. Hier wird man also leicht die Anforderung einer bestimmten Ueberzahl von Stimmen für die Neuerung und für die Verurtheilung zur Entscheidung fordern.

Was anderseits die Anzahl der Beisitzer einer Behörde trifft, so verstehen wir für ausführende Behörden leicht den alten Spruch: einer sei der Herr! sowohl für die Einheit des Willens, als die Sicherheit und Raschheit der Ausführung, sowie für die Consequenz im Festhalten bestimmter Plane.

Für die Behörden des Gerichtes und bloßer Berathung, sowie der Gesetzgebung, werden wir hingegen für die Vereinigung Mehrerer sprechen. Hier versteht es sich von selbst, daß von einer Gesellschaft leidenschaftlich unruhiger, selbstsüchtiger und kenntnißloser Männer keine weisen Beschlüsse zu erwarten seyen. Der ordnungslose Widerstreit der Meinungen verspricht nicht, sich zur Wahrheit, sondern zum Sieg der rohen Gewalt der Kühnheit oder der List auszugleichen.

Eine gute Berathung setzt also schon für jeden Theilnehmer Ruhe des Urtheils, Rechtlichkeit und ein gewisses Maaß der Einsicht und Kenntnisse voraus, so daß alle im Großen schon einig sind und nur in den feineren Unterschieden ihre Meinungen auszugleichen haben. Hier wird es also darauf ankommen, daß unter den rechtlichen Gebildeten solche zusammentreten, deren besondere Lage die Einzelnen von den verschiedenenen streitenden Interessen der Gesellschaft angesprochen werden läßt und die für die verschiedenen Anforderungen der Einsicht und der Kenntniß die rechte Bildung haben.

Die wahren mittleren Werthe bestimmen sich hier also ohne alle Rechnung dahin, daß über der Grundlage einer tüchtigen Rechtlichkeit und Einsicht der ganzen Gesellschaft alle streitenden Privatinteressen und verschiedenen Kenntnisse hinlänglich und gleichmäßig vertreten werden, in jedem Theil von nicht zu vielen Mitgliedern, damit die Berathungen nicht allzu langwierig und dadurch unsicher werden.

Eben so werden wir bei den strafrechtlichen Entscheidungen durch eine Gesellschaft von Richtern oder Geschwornen nur auf die Schwierigkeit geführt, ob es recht sei, das S c h u l d i g nur durch eine Mehrheit der Stimmen zu entscheiden. Wo es sich um willkührliche Anordnungen handelt, werden wir

leicht der Mehrheit der Stimmen nachgeben, aber wie da, wo es um strenges Recht zu thun ist? Theoretisch wäre da die Forderung in England richtiger, daß Alle einstimmig sprechen sollen; aber diese Einstimmigkeit wird leicht durch Nachgeben Einzelner erkünstelt, wir bleiben hier also bei Laplace's Grund des Schutzes der gesetzlichen Ordnung und somit für die freie Abstimmung auf Mehrheit der Stimmen.

Endlich bleibt dann hier noch die Wahl nach Mehrheit der Stimmen in Frage, welche bei repräsentativen Verfassungen von so großer Wichtigkeit ist, und daher in Frankreich manchen Bearbeiter gefunden hat. Sobald von mehreren Wählern zwischen mehr als zwei Dingen, z. B. zwischen mehr als zwei Candidaten in einer Wahl entschieden werden soll, bekommt die Sache Schwierigkeiten. Alle künstlichen Systeme, bei denen jeder Stimmzettel mehrere Namen in einer gewissen Rangordnung giebt, aus denen doch nur einer gewählt werden soll, sind ungelegen, denn sie können leicht auf Widersprüche führen. Wäre nämlich so zwischen dreien die Wahl, so könnte einer die meisten Stimmen im ersten Rang haben, und doch überboten werden, wenn ihn noch mehrere im dritten treffen, während ein Anderer ihn durch den zweiten Rang überbietet. Es wird besser seyn, nur für Einen auf einmal zu votiren. Lassen wir dann schon die relative Mehrheit entscheiden, so ist das Verfahren am leichtesten, aber auch dem Loos am ähnlichsten und weniger Zeichen des Vertrauens. Fordern wir aber absolute Stimmenmehrheit, so können wir wieder in Verlegenheit kommen. Entscheidet eine Wahl nicht, und wir wollen jede folgende wieder ganz frei geben, so kann die Sache immer unentschieden bleiben. Wollen wir also sicher zum Ende kommen, so müssen wir diejenigen von der neuen Wahl ausschließen, welche zuvor die wenigsten Stimmen hatten, und bei endlich gleicher Anzahl der Stimmen durch das Loos entscheiden lassen. Größere Künstlichkeit der Wahlordnung wird schwerlich dem Zweck der Vertrauenswahl besser entsprechen.

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturbeobachtung.

Einleitung.

§. 39.

Ich habe die Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach der gewöhnlichen Unterscheidung ihrer Aufgaben besprochen, jetzt muß ich aber für die Vergleichung mit der Naturbeobachtung überhaupt auf den allgemeinen Begriff der Wahrscheinlichkeit zurücksehen. Wir fanden, die Wahrscheinlichkeitsrechnung sei die unbestimmte Durchschnittsrechnung. So müssen wir sie im Allgemeinen mit der bestimmten Durchschnittsrechnung vergleichen. Die letztere berechnet mittlere Werthe für eine gegebene Reihe von Werthen einer veränderlichen Größe, z. B. mittlere Wärme, mittlere Barometerhöhe, mittlere Getreidepreise. Hier ist der einfachste Fall die Bestimmung des arithmetischen Mittels. Es ist eine Anzahl verschiedener Zahlen gegeben, man fragt, wie groß müßte eine jede seyn, wenn sie alle gleich wären und dann dieselbe Summen gäben, wie zuvor? Hier addiren wir alle Zahlen und dividiren durch die Anzahl derselben. Aber so einfach bleibt die Bestimmung nicht immer, indem oft

mehrere veränderliche Größen mit einander verbunden die Bestimmung geben.

Z. B. es werde nach dem mittleren Barometerstand eines Ortes an einem bestimmten Tage gefragt. Hier kann ich am einfachsten die Mitte zwischen den höchsten und niedrigsten angeben, genauer ist aber die mittlere Barometerhöhe diejenige, bei welcher, wenn sie den ganzen Tag bestanden hätte, die Luft dieselbe Summe des Druckes geübt haben würde, die sie wirklich geübt hat. Diese mittlere Barometerhöhe wäre also die Höhe des Rechtecks, dessen Inhalt dem Flächeninhalt zwischen der Axe und einer Curve gleich wäre, für die ich zwischen rechtwinklichen Coordinaten die Zeit als Abscisse und die zugehörige Barometerhöhe als Ordinate ordnete. Mit endlichen Differenzen haben wir also jede Barometerhöhe mit ihrer Zeit zu multipliciren, diese Producte zu addiren und die Summen mit der Zahl der ganzen Zeit zu dividiren.

Eben so haben wir es mit den mittleren Getreidepreisen. Ungenauer addiren wir alle Preise, die vorkamen, und dividiren mit der Zahl der verschiedenen Preise. Dies gibt aber einen mittleren Marktpreis nur, wenn von jeder Sorte gleich viel verkauft wurde. Genauer muß ich jeden Preis mit der Zahl der so verkauften Scheffel multipliciren, diese Producte addiren und die Summen mit der Zahl aller Scheffel dividiren.

So kommen wir also hier immer auf dieselbe Form der Gleichung, wie bei dem mittleren Lebensalter einer Gesellschaft. War $x, x', x'' \ldots$ die Reihe der Alter, $y, y', y'' \ldots$ die Reihe der Zahlen der in jedem Alter Lebenden, so war das mittlere Lebensalter

$$\frac{xy + x'y' + x''y'' \ldots}{y + y' + y'' \ldots}$$

So sehen wir, wie diese Durchschnittsrechnung auf die Form der Bestimmung der Schwerpunkte für in einer graden Linie vertheilte Massen zurückkommt, denn wenn y, y', y'' die Massen und x, x', x'' die Entfernungen derselben von einem bestimmten An-

fangspunkt der Messung, so ist die Entfernung des Schwerpunkts wie zuvor $= \frac{xy + x'y' + x''y''}{y + y' + y''}$.

Hätten wir es nun mit stetigen Uebergängen zu thun, so ist folglich der mittlere Werth $= \frac{\int x y d x}{\int y d x}$.

Das einfache arithmetische Mittel entsteht dann aus diesem, wenn alle y gleich sind und also jedes gleich 1 gesetzt werden kann.

§. 40.

Vergleichen wir nun mit den mittleren Werthen dieser bestimmten Durchschnittsrechnung die unbestimmten Durchschnitte, so sahen wir bei der Wahrscheinlichkeit a priori ihre eigenthümliche Construction der Verhältnisse gleichmöglicher Fälle, aber die Wahrscheinlichkeit a posteriori hatte es immer mit solchen unbestimmten mittleren Durchschnitten zu thun. Dies sind größtentheils die Fälle der mathematischen Induction, welche wir nach den Maximen zu behandeln haben, die bei den Gesetzen der Sterblichkeit vorkamen. Daneben steht nun aber für die Naturbeobachtung noch ein anderer Fall den wir an einem Beispiel deutlich machen wollen.

Zwei Schützengesellschaften wetteifern um die größere Geschicklichkeit. Um nun zwischen ihnen die Entscheidung zu vermitteln, legt jede eine Scheibe vor, in welche 100 Kugeln bei Zielen nach ihrer Mitte geschossen worden sind. Wir werden hier der Gesellschaft den Preis zuerkennen können, welche den kleinsten mittleren Fehler begangen hat. Dafür messen wir die Entfernung jeder Kugel vom Mittelpunkt der Scheibe und nehmen aus allen diesen das arithmetische Mittel, und wollen wir nun den Punkt des mittleren Fehlers auf der Scheibe selbst bestimmen, so suchen wir für diese mittlere Entfernung auch noch das mittlere Azimuth. Gesetzt nun aber, ein andermal wäre mir nur eine Zeichnung von der Lage der Kugeln gegen einander gegeben, ohne Angabe des Mittelpunkts oder Umringes der Scheibe, so würde ich eben

jenen Ort des mittleren Fehlers als den wahrscheinlichsten Ort des Mittelpunkts selbst ansehen. Aber nach der vorigen Methode kann ich ihn jetzt nicht suchen; ich kann nur die Stellen der Kugeln unter einander vergleichen, und werde jetzt den Schwerpunkt suchen, welcher der Scheibe gehörte, wenn sie selbst ohne Gewicht wäre, aber an jedem jener Punkte von einer gleich schweren Kugel gedrückt würde, und diesen müßte ich als den Mittelpunkt ansehen, gegen welchen der mittlere Fehler gemessen würde. In analoger Weise haben wir bei ungenaueren Beobachtungen die Ausgleichung zu suchen, und dies ist es vorzüglich, worauf wir noch Rücksicht zu nehmen haben. Für die analytische Ausführung stehen hier aber im Allgemeinen die zwei Aufgaben neben einander:

1) Aus Reihenfolgen von Beobachtungen für ein gewisses Gebiet der Erscheinungen die Funktionsform zu bestimmen, welche das Naturgesetz dieser Erscheinungen ausdrückt, oder auch nur in eine gegebene Reihe von Beobachtungen zu interpoliren.

2) Bei gegebener Funktionsform aus einer Reihe ungenauer Beobachtungen angenäherte Werthe für die Constanten zu bestimmen.

Alle dieses gibt in der That wahrscheinliche Bestimmungen für Naturgesetze. Allein die unter erstens fallenden Aufgaben fordern eine gar zu vielgestaltige analytische Ausführung, als daß wir sie hier mit in Untersuchung ziehen könnten. Die zweite Aufgabe hingegen ist hier unser Fall, wiewohl sie in der Anwendung vielfach unter Bedingungen der ersten Art steht.

§. 41.

Wenn wir diesen zweiten Fall mit dem vorhin Gesagten vergleichen, so stellt sich eine nur subjective Wahrscheinlichkeit für die mittleren Werthe der Constanten der Function in Frage, die wir am besten so fixiren können: wir berechnen einen mittleren Werth so, daß die Summe aller Abweichungen der einzelnen Werthe von diesem mittleren Werthe ein

Kleinstes werde. Eine solche Berechnung kann im Allgemeinen entworfen werden, da für uns subjectiv die Constanten der Function innerhalb sehr enger Grenzen, wenn gut beobachtet wurde, als veränderlich erscheinen. Wir müßten für diese kleinste Summe der Abweichungen die Differentiale derselben gleich Null setzen. Um aber dafür eine Rechnung anzulegen, müssen wir von einer willkührlichen ersten Voraussetzung zur Bestimmung der mittleren Werthe ausgehen. Das einfache arithmetische Mittel kann nur angewendet werden, wenn nur eine mittlere Constante zu bestimmen ist, und wenn die Function erlaubt, daß man gleiche, aber entgegengesetzte Abweichungen gegen einander abrechnen, oder allen Abweichungen dasselbe Zeichen geben dürfe. Ist aber von Fehlern die Rede, so wird es allgemeiner gelten, daß gleich große positive und negative Abweichungen vielmehr als gleiche Abweichungeu neben einander gelten. Alsdann ist die einfachste Voraussetzung, die Abweichungen nach ihren Quadraten abzuschätzen und also zu fordern, daß die Summe ihrer Quadrate ein Kleinstes werde. So werden wir hier auf die von Gauß gegebene Methode der kleinsten Quadratsummen geführt.

Am einfachsten suchen wir diesen kleinsten Werth, indem wir alle Beobachtungen als gleich gut gelten lassen. Vollständiger werden wir aber darin noch Unterschiede machen müssen. Wenn wir also die Abweichung jedes Werthes vom mittleren seinen Fehler nennen, so würde dann noch jedem Fehler ein eignes Gewicht beizulegen seyn, mit dem er zu multipliciren wäre, um seine Größe zu bestimmen, es würde nach der Vergleichung mit dem Schwerpunkt jedem Werth neben seiner Entfernung vom Schwerpunkt noch eine eigene Masse gegeben.

Endlich wenn die Rechnung zur Bestimmung des mittleren Werthes durchgeführt ist, entstände noch die Frage, wie wahrscheinlich es sei, daß dieser mittlere Werth nicht über eine bestimmte Größe vom wahren abweiche.

§. 42.

Um nun für die Methode der kleinsten Quadratsummen die Rechnung anzulegen, nehmen wir an, die Function, unter deren Gesetz wir mehrere Beobachtungen von nicht völliger Genauigkeit haben, sei von der Form

$$X = \varphi\,(a, b, c \,..\, x, y, z \,..)$$

so daß A, A', A'', A''' . . . mehrere beobachtete Werthe von X sind, welche verschiedenen bekannten Werthen der veränderten Größen der Function

$$x, y, z$$
$$x', y', z'$$
$$x'', y'', z''$$

entsprechen. Dagegen a, b, c seyen die nicht genau bekannten Constanten, durch welche die veränderlichen x, y, z in der Function verbunden sind, und für die wir die mittleren Werthe bestimmen wollen. Sind nun f, f', f'', f''' . . . die Fehler bei den einzelnen Beobachtungen, so haben wir

$$f = A - \varphi\,(a, b, c \,...\, x, y, z)$$
$$f' = A' - \varphi\,(a, b, c \,...\, x', y'\, z')$$
$$f'' = A'' - \varphi\,(a, b, c \,...\, x'', y'', z'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun soll $f^2 + f'^2 + f''^2 + f'''^2 + \ldots.$ ein Kleinstes werden, also müssen wir das Differential davon = o stellen. Wir haben also

$$f \,.\, df + f' \,.\, df' + f'' \,.\, df'' + f''' \,.\, df''' \ldots = o.$$

Für df, df', df'' . . . entsprechen aber den unsichern Werthen A, A', A'' . . . . in engen Grenzen verschiedene Werthe a, a', a'' . . b, b', b'' . . c, c', c'' . . . so daß wir in der Function für die Differentiale df, df' . . . a, b, c als veränderlich nehmen müssen. So erhalten wir

$$df = -\frac{dX}{da}\,da - \frac{dX}{db}\,db - \frac{dX}{dc}\,dc$$

$$df' = -\frac{dX'}{da}\,da - \frac{dX'}{db}\,db - \frac{dX'}{db}\,dc$$

u. s. f.

Also

$$f\left(-\frac{dX}{da}\,da-\frac{dX}{db}\,db-\frac{dX}{dc}\,dc\right)+$$
$$f'\left(-\frac{dX'}{da}\,da-\frac{dX'}{db}\,db-\frac{dX'}{dc}\,dc\right)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Da nun aber a, b, c . . von einander unabhängig, so kann diese Gleichung nur dadurch allgemein = 0 werden, daß die Coefficienten jedes einzelnen Differentials da, db, dc = 0 werden. So erhalten wir also so viel Gleichungen, als gesuchte Constanten a, b, c da sind, aus denen wir ihre mittleren Werthe zu bestimmen haben.

Diese Gleichungen haben also die Form

$$-f\frac{dX}{da}-f'\frac{dX'}{da}-f''\frac{dX''}{da}-\ldots = 0.$$
$$-f\frac{dX}{db}-f'\frac{dX'}{db}-f''\frac{dX''}{db}-\ldots = 0.$$

u. s. f.

Um die Sache durch die Künstlichkeit der ausführenden Rechnungen nicht undeutlich zu machen, wählen wir ein sehr einfaches Beispiel bei Biot *).

Die allgemeine geologische Formel für die Länge des Secundenpendels = X ist

$$X = a + b \sin. l^2.$$

wobei a die Länge desselben unter dem Aequator, b die Verlängerung desselben unter dem Pol und l die Breite jedes Beobachtungsortes.

Nun gibt Biot 6 genaue Beobachtungen der Länge des Decimalsecundenpendels, sie seyen $A, A' \ldots A^{v}$ unter verschiedenen Breiten. Die Werthe vom $\sin. l^2$ für diese Orte seyen $m, m' \ldots m^{v}$. Hier lassen sich also jedesmal durch die Vergleichung zweier Beobachtungen genäherte Werthe für a und b erhalten. Wir wollen aber alle sechs nach der Me-

*) Traité d'astronomie phys. T. III. p. 164—169.

thode der kleinsten Quadratsummen dafür verbinden. Dafür haben wir

$$f = A - a - mb$$
$$f' = A' - a - m'b$$
$$f'' = A'' - a - m''b$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f^v = A^v - a - m^v b$$

Also $df = - da - m db$

$df' = - da - m' db$

u. s. ferner.

Sodann $f df = (A - a - mb)(- da - m db)$

$f' df' = (A' - a - m'b)(- da - m' db)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f^v df^v = (A^v - a - m^v b)(- da - m^v db)$

und die Summe aller dieser $= 0$.

Sondern wir nun die Coefficienten von da und db, so wird 1)

$- (A + A' + A'' \ldots + A^v) + 6a + (m + m' \ldots + m^v) b = 0$ und 2)

$- (m A + m' A' + m'' A'' \ldots + m^v A^v) + (m + m' + m'' \ldots + m^v) a + (m^2 + m'^2 \ldots + m^{v2}) b = 0.$

Aus diesen beiden Gleichungen sind dann die Werthe von a und b zu nehmen.

Die von Biot aufgeführten Beobachtungen sind nun:

Ort.	Breite.	Pendellage in Metern.
Formentera	38° 39′ 46″	0,7412517
Figeac	44 36 45	0,7416243
Bordeaux	44 50 25	0,7416151
Clermont	46 48 4	0,7417157
Paris	48 50 15	0,7419262
Dünkirchen	51 2 8	0,7420865

Die letzte Reihe gibt also die Werthe von A, aus der zweiten müssen die Werthe für $\sin. l^2$ oder m berechnet werden. Dadurch erhalten wir:

$$f = 0{,}7412517 - a - 0{,}3903417 \,.\, b$$
$$f' = 0{,}7416243 - a - 0{,}4942870 \,.\, b$$
$$f'' = 0{,}7416151 - a - 0{,}4972122 \,.\, b$$
$$f''' = 0{,}7417157 - a - 0{,}5136117 \,.\, b$$
$$f^{IV} = 0{,}7419262 - a - 0{,}5667721 \,.\, b$$
$$f^{V} = 0{,}7420865 - a - 0{,}6045628 \,.\, b$$

und dann unsre beiden Gleichungen:

$$- 4{,}4502195 + 6\,a + 3{,}0657375 \,.\, b = 0.$$
$$- 2{,}27397288 + 3{,}0657375 \,.\, a + 1{,}59339312 \,.\, b = 0$$

und mit 6 dividirt:

$$- 0{,}74170325 + a + 0{,}51095625 \,.\, b = 0.$$
$$- 0{,}37899548 + 0{,}51095625 \,.\, a + 0{,}26556552 \,.\, b = 0.$$

Folglich

$$a = \overset{m}{0},739703526$$
$$b = \overset{m}{0},003913689$$

und $X = \overset{m}{0},739703526 + \overset{m}{0},003913689 \,.\, \sin. l^2.$

§. 43.

Das einfache arithmetische Mittel entspricht nun dieser Methode der kleinsten Quadratsummen in dem einfachen Fall, wo nur eine Constante gesucht wird, die Functionsform nur $X = a$ wäre. Die Anwendung dieser allgemeinen Regeln führt hingegen zu weitläuftigeren Rechnungen, je nachdem die Functionsform $X = \varphi\ (a,\ b,\ c\ .\ .\ .\ x,\ y,\ z)$ verwickelter wird durch die Anzahl der bestimmenden Größen und das Steigen derselben in höhere Potenzen.

Für das letztere sind die Fälle zu unterscheiden, wo die unsichern Constanten in höheren Potenzen vorkommen, und andrerseits, wo dies die bestimmenden Veränderlichen trifft.

Das erste kann leicht beseitigt werden. Da wir nämlich mehr gegebene Beobachtungen, als gesuchte Constanten voraussetzen, so daß, wenn der ersteren n, der anderen m wären, wir $n > m$ hätten, so berechne man aus m gegebenen Gleichungen die genäherten Werthe a_1, b_1, c_1, setze nun

$$a = a_1 + a',$$
$$b = b_1 + b',$$
$$c = c_1 + c',$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

und führe diese Werthe in die gegebenen Gleichungen anstatt a, b, c ein. Nun kommt es nur noch darauf an, die mittleren Werthe für die Correctionen a', b', c' .... zu bestimmen. Da nun nur für gute Beobachtungen diese Methoden brauchbar sind, so müssen a', b', c' . . . immer so kleine Größen seyn, daß deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, wodurch dann die gegebenen Gleichungen auf den ersten Grad zurückgeführt sind und dann nach der gegebenen Methode behandelt werden können.

Allgemein kann man also in Rücksicht auf die zu bestimmenden Constanten die gegebenen Gleichungen als lineäre Gleichungen des ersten Grades voraussetzen. Wir können ganz allgemein annehmen:

$$X = ax + by + cz \ldots.$$

Dann haben wir
$$\begin{aligned} A &= ax + by + cz \ldots \\ A' &= ax' + by' + cz' \ldots \\ A'' &= ax'' + by'' + cz'' \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Also
$$\begin{aligned} f &= A - ax - by - cz \ldots \\ f' &= A' - ax' - by' - cz' \ldots \\ f'' &= A'' - ax'' - by'' - cz'' \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sodann
$$\begin{aligned} df &= -xda - ydb - zdc \\ df' &= -x'da - y'db - z'dc \\ df'' &= -x''da - y''db - z''dc \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} fdf &= (A - ax - by - cz)(-xda - ydb - zdc) \\ f'df' &= (A' - ax' - by' - cz')(-x'da - y'db - z'dc) \\ f''df'' &= (A'' - ax'' - by'' - cz'')(-x''da - y''db - z''dc) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Folglich
$$\left.\begin{aligned} &-Ax + ax^2 + bxy + cxz \\ &-A'x' + ax'^2 + bx'y' + cx'z' \\ &-A''x'' + ax''^2 + bx''y'' + cx''z'' \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} -Ay + axy + by^2 + cyz \\ -A'y' + ax'y' + by'^2 + cy'z' \\ -A''y'' + ax''y'' + by''^2 + cy''z'' \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} -Az + axz + byz + cz^2 \\ -A'z' + ax'z' + by'z' + cz'^2 \\ -A''z'' + ax''z'' + by''z'' + cz''^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Oder wenn wir ſ als Summenzeichen einführen:

$$-ſAx + aſxx + bſxy + cſxz = 0.$$
$$-ſAy + aſxy + bſyy + cſyz = 0.$$
$$-ſAz + aſxz + bſyz + cſzz = 0.$$

woraus dann a, b und c zu bestimmen sind, so daß die Weitläuftigkeit der Rechnung nur auf der der Eliminationen bei Gleichungen des ersten Grades beruht.

Ich setze zur Erläuterung das Beispiel aus dem mathematischen Wörterbuch, Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 1000, bei. Es sei nämlich

$$A = a - b + 2c$$
$$A' = 3a + 2b - 5c$$
$$A'' = 4a + b + 4c$$
$$A''' = -a + 3b + 3c$$

und $A = 3$, $A' = 5$, $A'' = 21$, $A''' = 14$;

so erhalten wir:

$$f = 3 - a + b - 2c$$
$$f' = 5 - 3a - 2b + 5c$$
$$f'' = 21 - 4a - b - 4c$$
$$f''' = 14 + a - 3b - 3c$$

Folglich $A = 3,\ x = +1,\ y = -1,\ z = +2$
$A' = 5,\ x' = +3,\ y' = +2,\ z' = +5$
$A'' = 21,\ x'' = +4,\ y'' = +1,\ z'' = +4$
$A''' = 14,\ x''' = -1,\ y''' = +3,\ z''' = +3$

Bildet man daraus die bezeichneten Summen, so wird:

$$-88 + 27a + 6b = 0$$
$$-70 + 6a + 15b + c = 0$$
$$-107 + b + 54c = 0$$

und daraus $a = 2{,}470$; $b = 3{,}551$; $c = 1{,}916$.

§. 44.

Der andere Fall war nun der, daß die bestimmenden veränderlichen Größen x, y, z auf höhere Potenzen steigen. Da deren besondere Werthe hier gegeben sind, so macht dies für die Theorie keine Schwierigkeiten, sind aber bestimmte Gesetze der Abhängigkeit dieser Größen von einander bekannt, so lassen sich zur bequemeren Berechnung für besondere Fälle vielerlei analytische Hülfsmittel anwenden. Ich wähle zur Erläuterung den in der Physik so oft vorkommenden Fall, wenn $y = x^2$, $z = x^3$ u. s. w., die Functionsform also

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

und zwar so, daß die successiven Werthe von $x, x', x'' \dots$ in der arithmetischen Reihe 1, 2, 3, 4 ... genommen werden.

Wie z. B. wenn die x Grade der Temperatur, die zugehörigen A Grade der Dichtigkeit einer Flüssigkeit für die jedesmalige Temperatur wären.

Diese Annahme ist von sehr großer Allgemeinheit, denn wenn die Functionsform

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 \dots$$

bis zu x^m geht und x mit der Differenz = 1 wächst, so ist bekanntlich der Gleichung rechte Seite das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der m ten Ordnung, und wir können jede Reihe der Resultate von m Beobachtungen, für welche sich die Werthe von x in einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung folgen, annäherungsweise unter eine Function von dieser Form fassen, indem wir nach den Formeln der Differenzenrechnung aus den Differenzenreihen der Werthe A, A', A'' und den bekannten Werthen von $x, x' x''$ die Werthe a, b, c bestimmen. Versuchen wir nun aber die Functionsform bis x^m und haben wir dabei mehr als m Beobachtungen, so lassen sich dann nach unsrer Methode mittlere Werthe für a, b, c bestimmen. Dann nämlich haben wir:

$$A = a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1^3 + \dots$$
$$A' = a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 + \dots$$
$$A'' = a + b \cdot 3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 + \dots \text{ u. s. f.}$$

Folglich

$$f = A - a - b \cdot 1 - c \cdot 1^2 - d \cdot 1^3 - \ldots$$
$$f' = A' - a - b \cdot 2 - c \cdot 2^2 - d \cdot 2^3 - \ldots$$
$$f'' = A'' - a - b \cdot 3 - c \cdot 3^2 - d \cdot 3^3 - \ldots$$

und

$$df = - da - 1 \cdot db - 1^2 \cdot dc - 1^3\, dd$$
$$df' = - da - 2 \cdot db - 2^2 \cdot dc - 2^3\, dd$$
$$df'' = - da - 3 \cdot db - 3^2 \cdot dc - 3^3\, dd$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Also

$$fdf = (A - a - b.1 - c.1^2 - d.1^3)(-da - 1.db - 1^2 dc - 1^3 dd)$$
$$f'df' = (A' - a - b.2 - c.2^2 - d.2^3)(-da - 2.db - 2^2 dc - 2^3 dd)$$
$$f''df'' = (A' - a - b.3 - c.3^2 - d.3^3)(-da - 3.db - 3^2 dc - 3^3 dd)$$

Sodann

$$\left.\begin{array}{l} - A + a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1^3 \\ - A' + a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 \\ - A'' + a + b \cdot 3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} -1.A + 1.a + 1.b.1 + 1.c.1^2 + 1.d.1^3 \\ -2.A' + 2.a + 2.b.2 + 2.c.2^2 + 2.d.2^3 \\ -3.A'' + 3.a + 3.b.3 + 3.c.3^2 + 3.d.3^3 \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} -1^2.A + 1^2.a + 1^2.b.1 + 1^2.c.1^2 + 1^2.d.1^3 \\ -2^2.A' + 2^2.a + 2^2.b.2 + 2^2.c.2^2 + 2^2.d.2^3 \\ -3^2.A'' + 3^2.a + 3^2.b.3 + 3^2.c.3^2 + 3^2.d.3^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Oder wenn wir wieder das Summenzeichen $\int$ einführen:

$$- \int A \quad + x \,.\, a + b \int x + c \int x^2 + d \int x^3 = 0.$$
$$- \int (A x) + a \int x + b \int x^2 + c \int x^3 + d \int x^4 = 0.$$
$$- \int (A x^2) + a \int x^2 + b \int x^3 + c \int x^4 + d \int x^5 = 0.$$
$$- \int (A x^3) + a \int x^3 + b \int x^4 + c \int x^5 + d \int x^6 = 0.$$

Dabei haben wir aber:

$$\int x = \tfrac{1}{2}\, x\, (x + 1);$$
$$\int x^2 = \tfrac{1}{6}\, x\, (x + 1)\, (2\, x + 1);$$
$$\int x^3 = \tfrac{1}{4}\, x^2\, (x + 1)^2;$$
$$\int x^4 = \tfrac{1}{30}\, x\, (x + 1)\, (2\, x + 1)\, (3\, x^2 + 3\, x - 1);$$
$$\int x^5 = \tfrac{1}{12}\, x^2\, (x + 1)^2\, (2\, x^2 + 2\, x - 1);$$
$$\int x^6 = \tfrac{1}{42}\, x\, (x + 1)\, (2 x + 1)\, [3\, x^2\, (x + 1)^2 - 3 x\, (x + 1) + 1],$$

so daß aus diesen Gleichungen a, b, c und d zu berechnen sind. (Vergl. Gehlers physikalisches Wörterbuch. Neue Ausgabe. Artikel Beobachtung. S. 901 u. f.)

§. 45.

Nach diesen Regeln haben wir also bei hinlänglicher Vervielfältigung der Beobachtungen die mittleren Werthe derselben zu ermessen. So bleibt uns denn nach Ausführung der Rechnungen noch die eine Frage, wie ermessen wir die Grade der Genauigkeit, auf welche wir uns jedesmal verlassen können?

1) Dafür haben wir alle Vorbereitungen oben §. 19. 2, gewonnen. Wenn wir nämlich voraussetzen, daß in einem engen Zwischenraum bei hinlänglich feinen und oft wiederholten Beobachtungen jeder Fehler möglich und jeder gleich große Fehler gleich möglich sei, so entspricht die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ liege, jener subjectiven Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Beobachtungen, welche wir durch

$$\Theta t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\delta} e^{-t^2} dt$$

gemessen haben.

Wenn nun h noch ein Factor der Genauigkeit der Beobachtung ist, so haben wir ht für t zu schreiben und erhalten die Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\delta} e^{-h^2 t^2} dt.$$

Nun war $\Theta t = \Theta \rho = 1/2$, wenn wir $\rho = 0{,}4769363$ setzen. Nehmen wir daher $h\delta = \rho$, $\delta = \frac{\rho}{h}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{\rho}{h}$ und $+\frac{\rho}{h}$ enthalten sei $= 1/2$. Mann nennt daher die Größe $\frac{\rho}{h}$ den **wahrscheinlichen Fehler**, welchen Gauß mit r bezeichnete.

Die Wahrscheinlichkeit also, daß bei stetiger Aenderung der Function der Fehler zwischen bestimmten Grenzen liege, bestimmt das Integral $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int e^{-h^2 t^2} dt$. Hierbei ist die

Wahrscheinlichkeit für jeden bestimmten Fehler nur $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2} dt$ ein Differential, also unendlich klein, weil wir die Unterschiede der Fehler stetig voraussetzten.

2) Aendern wir nun aber die Ansicht so, daß wir die Fehler in discreter Reihe voraussetzen, so daß wir eine endliche Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers als Function des Fehlers = $\varphi(\delta)$ voraussetzten, so ergibt sich die Vergleichung mit dem vorigen in folgender Weise. Suchen wir die Wahrscheinlichkeit nur zwischen den Grenzen δ und $d\delta$, so wäre hier $\varphi(\delta)$ constant und die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird also $\varphi(\delta)\, d\delta$. Aber dieses $\varphi(\delta)\, d\delta$ war ja so eben $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2} dt$, also haben wir schon $\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}$.

Wenn wir nun n gleich gute Beobachtungen haben, deren Werth der Genauigkeit = h, so erhalten wir die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß grade die Fehler $\delta, \delta', \delta''$ .... neben einander fallen, gleich dem Product ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten, also

$$= \varphi(\delta) \,.\, \varphi(\delta') \,.\, \varphi(\delta_{\prime\prime}) \ldots.$$

und dieses wird

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2 (\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \ldots}$$

3) Wir können aber hier auch die Fehler als gegeben ansehen, und dann drückt die Formel die Wahrscheinlichkeit aus, daß h der wahre Werth der Genauigkeit der Beobachtungen sei.

Diese Wahrscheinlichkeit ist also der Größe

$$h^n e^{-h^2 (\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \ldots)}$$

proportional. Daher wird der wahrscheinlichste Werth von h derjenige, für den diese Größe ein Maximum wird. Wir setzen daher ihr Differential = 0 und erhalten $\delta^2 + d'^2 + \delta''^2 + \ldots = S$ gesetzt

$$n h^{n-1} e^{-h^2 S} - 2 h^{n+1} S e^{-h^2 S} = 0.$$

Also $n - 2h^2 S = 0$. $h^2 = \frac{n}{2S}$; $h = \sqrt{\frac{n}{2S}} = H$.

Das Quadrat der Genauigkeit der Beobachtungen steht also im graden Verhältniß der Anzahl der Beobachtungen, verbunden mit dem umgekehrten der doppelten Summe der Quadrate der Fehler.

So erhalten wir denn endlich den wahrscheinlichsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers $= \frac{\rho}{H} = \rho \sqrt{\frac{2S}{n}}$, welches wir $= R$ setzen.

4) Die Anwendung dieser Bestimmungen von H und R wird sich vorzüglich auf die Correction des arithmetischen Mittels beziehen, denn wir müssen die n Beobachtungen jede auf dieselbe Thatsache beziehen, damit sich die Fehler unmittelbar summiren lassen. Wir nehmen also aus den Beobachtungen das arithmetische Mittel, setzen dann die Abweichung jeder Beobachtung von diesem als ihren Fehler an, bestimmen daraus S und dem zu Folge den wahrscheinlichen mittleren Fehler der Beobachtung $= R$ und endlich den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels $= \frac{R}{\sqrt{n}}$.

Littrow *) gibt z. B. folgende Beobachtungen der Breite der Ofener Sternwarte.

	Fehler	
47° 29′ 11,″5	— 0,5	0, 25
12, 2	+ 0,2	0, 04
12, 8	+ 0,8	0, 64
11, 2	— 0,8	0, 64
11, 7	— 0, 3	0, 09
12, 3	+ 0, 3	0, 09
11, 5	— 0, 5	0, 25
11, 9	— 0, 1	0, 01
12, 4	+ 0, 4	0, 16
12, 5	+ 0, 5	0, 25
Mittel 47° 29′ 12,″0		2, 42 = S.

*) Theoretische und praktische Astronomie. I. S. 266.

Wir haben also $S = 2,42$; $n = 10$. Daher

$$R = \rho \sqrt{\frac{2S}{n}} = 0,47694 \sqrt{\frac{4,84}{10}} = 0,''33;$$

$$\frac{R}{\sqrt{n}} = 0'',104.$$

Der mittlere Fehler der Beobachtung $1/3$ Secunde und das arithmetische Mittel bis auf $1/10$ Secunde sicher.

5) Wir haben in diesem §. einen neuen Eingang der Untersuchung genommen und von der Gleichung in 3) $h^2 = \frac{n}{2S}$ hätten wir auch ausgehen können, um für die sicherste Bestimmung der mittleren Werthe die Methode der kleinsten Quadratsummen der Fehler zu fordern. Ueberlegen wir dafür noch einmal unsre ganze Angelegenheit! Diese Methode gibt immer für ein gegebenes System von unbekannten Fehlern die genauesten mittleren Werthe der Constanten der Function, aber ob diese mittleren Werthe auch die richtigsten sind, hängt davon ab, ob unsre Fehler sich allseitig gleichförmig um den wahren Werth gruppiren, oder ob sie größeren Theils nach einer Seite zu liegen. Im letzteren Fall bleiben die mittleren Werthe falsche. Um diese Allseitigkeit so viel möglich zu sichern, fordern wir daher die Vervielfältigung möglichst genauer Beobachtungen. Unsere Rechnung gibt also ganz genaue mittlere Werthe, deren wahrscheinliche Richtigkeit wir zum Theil auch aus der Enge der Fehlergrenzen und der Zahl der Beobachtungen bestimmen können. Anderntheils liegen aber diese Bestimmungen auch in der Art der Beobachtungen selbst, und diese bleiben ganz außerhalb unsrer Rechnung.

Sehen wir nun zurück, so findet sich unsre Grundgleichung $\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhtt}$ aus §. 19. herübergenommen. Dort war sie aber nach einer sehr verwickelten Näherungsrechnung aus den Potenzen des Binomium oder Polynomium der Wahrscheinlichkeit a priori bewiesen. Dies scheint sehr erkünstelt, da wir es ja hier viel einfacher nur mit mittleren

Werthen einer Wahrscheinlichkeit a posteriori zu thun haben, und so hat uns denn auch Gauß den einfacheren Zusammenhang dieser Gesetze gezeigt.

Ist $\varphi(\delta)$ eine feste Functionsform, unter welcher die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers δ durch diesen Fehler selbst dargestellt wird, so ergibt die Voraussetzung genauer Beobachtungen gleich, daß die Wahrscheinlichkeit, der Fehler liege zwischen den Grenzen $+\delta$ und $-\delta$, sich rasch der Einheit nähern müsse, wenn man für δ nur etwas größere Werthe ansetzt. Wir müssen dann also nahe bei

$$\sum_{-\delta}^{+\delta} \varphi(\delta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta) = 1$$

haben. Dieser Functionsform entspricht nun aus rein analytischen Gründen am einfachsten unser

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\delta\delta}$$

und da unsre ausgleichende Rechnung eine willkührliche Voraussetzung zuläßt, so sind wir unmittelbar berechtigt, diese Form als die bequemste anzuwenden. Gauß zeigt aber noch weiter, wie sie auch unmittelbar durch das Gesetz des einfachen arithmetischen Mittels gerechtfertigt werde. Es sei

$$X = \psi\,(a, b, c\,..)$$

die Gleichung, welcher die ungenauern Beobachtungen entsprechen sollten, und wofür wir die mittleren Werthe der Constanten a, b, c .. suchen. Ferner sei, wie zuvor $\varphi\delta$ die Wahrscheinlichkeit des Fehlers δ, so wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß ein System von Fehlern

$$\delta, \delta', \delta'', \delta''' \ldots$$

zusammentreffen werde,

$$= \varphi\delta \,.\, \varphi\delta' \,.\, \varphi\delta'' \,.\, \varphi\delta''' \,..= Q.$$

Hier wird also die wahrscheinlichste Voraussetzung die, in welcher Q ein Maximum, oder, wenn man differentiirt, $dQ = 0$ wird. Da aber a, b, c .. von einander unabhängig bleiben, so fordert dies auch für die partiellen Differentiale

$$\frac{dQ}{da} = 0, \frac{dQ}{db} = 0, \frac{dQ}{dc} = 0.$$

Setzen wir dann, der leichteren Differentiation wegen,

$$\log. Q = \log. \varphi\delta + \log. \varphi\delta' + \log. \varphi\delta'' \ldots$$

und nennen

$$\frac{d\,\varphi\,\delta}{\varphi\,\delta} = \varphi'\,\delta\,d\,\delta,$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\,\delta}{d\,a}\varphi'\,\delta + \frac{d\,\delta'}{d\,a}\varphi'\delta' + \frac{d\,\delta''}{d\,a}\varphi'\,\delta'' + \frac{d\,\delta'''}{d\,a}\varphi'\,\delta''' = 0$$

$$\frac{d\,\delta}{d\,b}\varphi'\,\delta + \frac{d\delta'}{d\,b}\varphi'\,\delta' + \frac{d\,\delta''}{d\,b}\varphi'\,\delta'' + \frac{d\,\delta'''}{d\,b}\varphi'\,\delta''' = 0$$

$$\frac{d\,\delta}{d\,c}\varphi'\,\delta + \frac{d\,\delta'}{d\,c}\varphi'\,\delta' + \frac{d\,\delta''}{d\,c}\varphi'\,\delta'' + \frac{d\,\delta'''}{d\,c}\varphi'\,\delta''' = 0$$

als die drei Bedingungsgleichungen, aus denen a, b, c zu bestimmen wäre. Wenden wir nun dieses auf den Fall des einfachen arithmetischen Mittels an. Sind hier $A, A', A'' \ldots$ die verschiedenen Werthe von X und m Beobachtungen in Frage, so ist das arithmetische Mittel

$$p = \frac{A + A' + A'' \ldots}{m}.$$

und die Bedingungsgleichung

$$A - p + A' - p + A'' - p \ldots\ldots = 0.$$

Für diesen Fall wird aber die allgemeine Bedingungsgleichung nur

$$\varphi'(A-p) + \varphi'(A'-p) + \varphi'(A''-p) + \varphi'(A'''-p) \ldots = 0,$$

Diese kann man nun auch schreiben:

$$(A-p)\,\frac{\varphi'(A-p)}{A-p} + (A'-p)\,\frac{\varphi'(A'-p)}{A'-p} + (A''-p)$$

$$\frac{\varphi'(A''-p}{A''-p} \ldots = 0.$$

Woraus denn gleich in Vergleichung mit dem ersten hervorgeht, daß

$$\frac{\varphi'(A-p)}{A-p} = \frac{\varphi'(A'-p)}{A'-p} = \frac{(\varphi'A''-p)}{A''-p} = \text{u. s. w.}$$

und gleich einer Constante seyn müsse. Wir haben also

$$\frac{\varphi'(A-p)}{A-p} = \frac{\varphi'\delta}{\delta} = \frac{d\log.\varphi\delta}{\delta\,d\,\delta} = k$$

und folglich integrirt

$$\text{Const.} + \lg.\ \varphi\delta = \tfrac{1}{2}\, k\, \delta\delta$$

oder auf die Zahlen übergegangen:

$$\varphi\delta = k' e^{\frac{1}{2} k \delta\delta}$$

wofür die beiden Constanten zu bestimmen sind, welche sich aus

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi\delta = 1$$ ergeben wie oben.

6) Die feineren Ausführungen der Methoden der kleinsten Quadratsummen für ihre großen astronomischen Zwecke sind Entwickelungen der Theorie aus den hier besprochenen Principien. Für meinen Zweck meine ich eine vollständige Uebersicht gegeben zu haben, um die Verbindung dieser Prinzipien mit denen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Allgemeinen nachzuweisen. Somit haben wir einer langen Rede kurzen Sinn dahin: die Methode der kleinsten Quadratsummen bestimmt das einzige Gebiet der Anwendung von Bernoulli's Polynomium der Wahrscheinlichkeit a priori auf die Wahrscheinlichkeit a posteriori, wiefern wir Naturbeobachtungen dadurch leiten wollen. Aber selbst hier ist diese Ableitung eigentlich eine erkünstelte, indem die Regel dieser Methode für die Bestimmung mittlerer Werthe ganz unabhängig für sich gilt und selbst die Bedingungen der Grenzbestimmung für die Richtigkeit dieser mittleren Werthe nicht brauchen von dorther entlehnt zu werden

